МЕТОДИ ТА ПРИЛАДИ КОНТРОЛЮ ТЕХНОЛОГІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ

УДК 519.246

ЗАЛЕЖНІ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

© Майстренко В.М., 2004
Національний технічний університет України „Київський політехнічний інститут”

Введено поняття залежності функції розподілу випадкового процесу. Введено також поняття параметричної форми функції розподілу. Обґрунтовано принцип математичного опису залежної функції розподілу

Аналітичним виразом законів розподілу є функції розподілу, які звичайно є функціями дискретного або безперервного аргументу. Функції розподілу можуть мати інтегральну і диференціальну форми. Найбільш часто використовується диференціальна форма — щільність ймовірності випадкового процесу, яку ми і будемо називати функцією розподілу [1, 2, 3].

Розглянемо випадок одномірних функцій розподілу. Вважається, що для конкретного процесу функція розподілу є постійною і має постійні параметри у вигляді моментів розподілу. Наприклад, при розрахунку результуючої похибки каналу кожній з складових похибки приписують відповідний закон розподілу [4]. При цьому момент першого порядку або математичне сподівання (середнє значення) випадкової величини характеризує тільки розташування кривої розподілу, а не її геометричні особливості [1]. Разом з тим у деяких теоретичних і практичних задачах, пов’язаних з аналізом випадкових процесів, форма кривої розподілу може залежати саме від розташування кривої розподілу на вісі випадкової величини. Такі функції розподілу можна назвати залежними.

Введене в роботі поняття про залежну функцію розподілу дозволяє описати випадковий процес одномірною щільністю розподілу ймовірностей. При цьому основні параметри процесу, такі, як час і поточна координата, функціонально пов‘язані із щільністю розподілу ймовірностей, що дає змогу при аналізі ймовірнісних процесів користуватися математичними прийомами для аналізу функцій двох змінних.

Натомість в літературі, наприклад, [1÷3,5,6], для опису випадкового процесу використовують n-мірну функцію розподілу. Для більш повного опису випадкового процесу вибирається все більша мірність. Для максимально повного опису процесу параметр n повинен прагнути до нескінченності. Тоді n-мірна щільність розподілу ймовірностей перейде в функціонал ймовірностей $P[\xi(t)]$.

Залежна функція розподілу описує той же процес, що і функціонал ймовірностей, але з спрощенням відповідної математичної моделі.

Залежні функції розподілу мають свої особливості, які спробуємо розглянути.

На практиці випадкові процеси в загальному випадку діють разом з детермінованими. Останні якраз в основному і визначають середнє значення випадкової величини. Наприклад, регулярний або тестовий сигнал, проходячи через канал, складається з шумами і перешкодами і не спотворює форми їх законів розподілу. Але цей зв’язок може бути і більш складним, якщо процес пов’язаний з впливом на крутість амплітудної характеристики підсилювача з боку випадкового або детермінованого сигналу, особливо, якщо амплітудна характеристика має ознаки нелінійності.

Залежність функції розподілу проявляється в тому, що середнє значення і момент часу впливають на геометрію функції розподілу. В загальному випадку змінюються всі параметри кривої розподілу, тобто всі центральні моменти, серед яких виділяються другий, третій і четвертий як такі, що найбільше впливають на форму кривої розподілу. Але найбільш важливою характеристикою закону розподілу, що визначає вплив на процес, є середнє квадратичне відхилення випадкової величини. Тому на першому етапі залежність функції розподілу будемо розглядати вплив середнього значення тільки на середнє квадратичне відхилення.

Найпростішою залежністю можна вважати мультиплікативну. Щоб отримати вираз для залежної функції закону розподілу потрібно звести функцію розподілу до параметричної форми, тобто до такої, в якій функція розподілу крім поточної координати x залежить від свого середнього значення та дисперсії або середнього квадратичного відхилення. Деякі функції розподілу, наприклад, нормальний закон, прийнято використовувати саме в такому вигляді:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (1)$$

Але більшість функцій розподілу потрібно привести до параметричної форми. Наприклад для рівномірного закону розподілу

$$\begin{cases} p(x) = 0 & \text{при } -\infty < x < X_1 \\ p(x) = \dfrac{1}{X_2 - X_1} & \text{при } X_1 \le x \le X_2 \\ p(x) = 0 & \text{при } X_2 < x < \infty \end{cases} \qquad (2)$$

З метою приведення його до параметричної форми потрібно знайти вирази для середнього значення і середнього квадратичного відхилення.

Для функцій розподілу, які широко використовуються, ці параметри наведені в літературі, наприклад, [2]. Для рівномірного закону розподілу

$$a = \frac{X_2 + X_1}{2}; \quad \sigma = \frac{X_2 - X_1}{\sqrt{12}}, \qquad (3)$$

де a – середнє значення випадкової величини ξ, σ – середнє квадратичне відхилення.

Підставляючи (3) в (2), отримаємо вираз для рівномірного закону в параметричній формі:

$$\begin{cases} p(x) = 0 & \text{при } -\infty < x < a - \sqrt{3}\sigma; \\ p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12}\sigma} & \text{при } a - \sqrt{3}\sigma \le x \le a + \sqrt{3}\sigma; \\ p(x) = 0 & \text{при } a + \sqrt{3}\sigma < x < \infty. \end{cases} \qquad (4)$$

Аналогічно можна отримати в параметричній формі вираз для будь-якого закону розподілу. Так для трикутного закону розподілу, котрий широко використовується і відомий в теорії похибок як трикутний закон розподілу Сімпсона

$$\begin{cases} p(x) = 0 & \text{при } -\infty < x < X_1; \\ p(x) = \dfrac{4(x - X_1)}{(X_2 - X_1)^2} & \text{при } X_1 \le x \le \dfrac{X_1 + X_2}{2}; \\ p(x) = \dfrac{4(X_2 - x)}{(X_2 - X_1)^2} & \text{при } \dfrac{X_1 + X_2}{2} \le x \le X_2; \\ p(x) = 0 & \text{при } X_2 < x < \infty, \end{cases} \qquad (5)$$

параметрична форма буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} p(x) = 0 & \text{при } -\infty < x < a - \sqrt{6}\sigma; \\ p(x) = \dfrac{\sqrt{6}\sigma - a + x}{6\sigma^2} & \text{при } a - \sqrt{6}\sigma \le x \le a; \\ p(x) = \dfrac{\sqrt{6}\sigma + a - x}{6\sigma^2} & \text{при } a \le x \le a + \sqrt{6}\sigma; \\ p(x) = 0 & \text{при } a + 6\sigma < x < \infty. \end{cases} \qquad (6)$$

При мультиплікативній формі залежності закону розподілу можна отримати, якщо середнє квадратичне відхилення буде мультиплікативно залежати від середнього значення, тобто

$$\sigma(a) = ka, \qquad (7)$$

де k — коефіцієнт впливу.

Щоб отримати вираз мультиплікативної залежності закону розподілу потрібно в параметричній формі закону розподілу середнього квадратичного відхилення замінити мультиплікативно залежним середнім квадратичним відхиленням (7). Наприклад, для нормального закону розподілу в (1) ввести (7). В результаті будемо мати, що

$$p(x) = \frac{1}{ka\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(\frac{x}{a} - 1\right)^2}{2k^2}}. \qquad (8)$$

Сімейство кривих цього закону розподілу для прикладу приведено на рис. 1 при k=1 та різних значеннях параметра a.

Вводячи (7) в (2), будемо мати мультиплікативно залежний рівномірний розподіл

$$\begin{cases} p(x) = 0 & \text{при } -\infty < x < a\left(1 - \sqrt{3}k\right); \\ p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{12}ak} & \text{при } a\left(1 - \sqrt{3}k\right) \le x \le a\left(1 + \sqrt{3}k\right); \\ p(x) = 0 & \text{при } a\left(1 + \sqrt{3}k\right) < x < \infty. \end{cases} \qquad (9)$$

Повертаючись знову до звичної форми залежності від границь X_1 та X_2, ми перейдемо до виразу (2), тобто в цій формі залежність закону розподілу є прихованою.

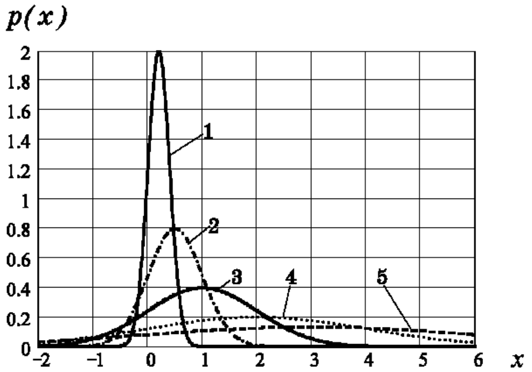
Відповідно для трикутного закону розподілу Сімпсона мультиплікативна залежність в параметричній формі має такий вигляд:

$$\begin{cases} p(x) = 0 & \text{при } -\infty < x < a\left(1 - \sqrt{6}k\right); \\ p(x) = \dfrac{\left(\sqrt{6}k - 1\right)a + x}{6a^2k^2} & \text{при } a\left(1 - \sqrt{6}k\right) \le x \le a; \\ p(x) = \dfrac{\left(\sqrt{6}k + 1\right)a - x}{6k^2a^2} & \text{при } a \le x \le a\left(1 + \sqrt{6}k\right); \\ p(x) = 0 & \text{при } a\left(1 + \sqrt{6}k\right) \le x < \infty. \end{cases} \qquad (10)$$

Як відомо, залежність може бути одночасно адитивною і мультиплікативною [4]. В цьому випадку середнє квадратичне відхилення повинно залежати від середнього значення наступним чином:

$$\sigma(a) = \sigma_0 + ka, \qquad (11)$$

де σ_0 – середнє квадратичне відхилення при нульовому середньому значенні.



1) a=0,1; 2) a=0,5;

3)a=1; 4) a = 2; 5)a=3

Рис. 1. Сімейство кривих мультиплікативної залежності нормального закону розподілу при параметрі k =1 та різних значеннях параметрах a

Щоб отримати одночасну адитивну та мультиплікативну залежність, наприклад, для нормального закону, потрібно в (1) замість значення σ ввести $\sigma(a)$, тобто (11). Тоді

$$p(x) = \frac{1}{(\sigma_0 + ka)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2(\sigma_0+ka)^2}}. \qquad (12)$$

Аналогічні вирази існують для будь-якого закону розподілу, але для їх знаходження потрібно мати відповідний закон розподілу в параметричній формі і постійне середнє квадратичне відхилення замінити залежним (11).

В загальному випадку функція залежності може бути будь-якою, в тому числі дуже складною. Тому цю функцію зручно розкласти в степінний ряд (Маклорена):

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= \sigma(0) + \frac{a}{1!}\sigma'(0) + \\ &+ \frac{a^2}{2!}\sigma''(0) + \ldots + \frac{a^n}{n!}\sigma^{(n)}(0) = \\ &= \sigma_0 + a\sigma_1 + \frac{a^2}{2}\sigma_2 + \ldots \end{aligned} \qquad (13)$$

Обмежуючись тільки першим членом ряду, ми приходимо до адитивного процесу. Один тільки другий член ряду описує мультиплікативний процес.

Якщо діють перший та другий члени ряду, то маємо одночасну адитивну і мультиплікативну залежність. Більш складні процеси описуються більшою кількістю членів ряду.

Такий підхід дозволяє більш точно визначити значення коефіцієнтів σ_0, σ_1, σ_2 та інших.

З (13) видно, що $\sigma_0 = \sigma(0)$, $\sigma_1 = k = \sigma'(0)$, $\sigma_2 = \sigma''(0)$ і так далі.

Залежність функції розподілу може бути легко отримана і через її спектр, якщо врахувати, що коефіцієнт другого члену виразу для спектра функції розподілу є початковим моментом другого порядку з зворотним знаком [7], тобто

$$\begin{aligned} S_p(\omega) &= 1 - j\omega a - \frac{\omega^2}{2}m_2\{\xi\} + \\ &+ j\frac{\omega^3}{6}m_3\{\xi\} + \frac{\omega^4}{24}m_4\{\xi\} = \\ &= 1 - \frac{\omega^2}{2}m_2\{\xi\} + \frac{\omega^4}{24}m_4\{\xi\} + \\ &+ j\left(-\omega a + \frac{\omega^3}{6}m_3\{\xi\}\right) \quad , \end{aligned} \qquad (14)$$

де $m_n\{\xi\}$ — початковий момент n-го порядку.

Залежність функції розподілу може бути ще більш складною, якщо вона змінює свою геометрію. Це буде спостерігатися при умові, коли від середнього значення будуть залежати не тільки середні квадратичні відхилення, а і моменти більш високого порядку, перш за все третього і четвертого, котрі впливають на геометрію кривої розподілу. Але в цьому випадку використати параметричну форму закону розподілу вже не вдається через те, що в цій формі не фігурують моменти вищих порядків. Тому доведеться звертатися до виразу спектра функції розподілу (14), в якому коефіцієнти членів є моментами відповідних порядків. В спектрі залежної функції розподілу коефіцієнт кожного члена буде містити функціональний зв‘язок з середнім значенням так само, як це робиться для будь-якого сигналу [8, 9].

Таким чином спектр залежної функції буде таким:

$$\begin{aligned} S_p(\omega) &= 1 - \frac{\omega^2}{2}m_2\{\xi, a\} + \\ &+ \frac{\omega^4}{24}m_4\{\xi, a\} + j\left(-\omega a + \frac{\omega^3}{6}m_3\{\xi, a\}\right). \end{aligned} \qquad (15)$$

Через зворотне перетворення Фур‘є від спектра залежної функції розподілу можна перейти до самої функції розподілу.

Якщо випадковий процес є нестаціонарним, то параметри залежної функції розподілу будуть залежати не тільки від середнього значення, а ще і від часу. В цьому випадку спектр залежної функції, яку можна вважати найбільш загальною, буде таким:

$$S_p(\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{2} m_2\{\xi, a, t\} + \\ + \frac{\omega^4}{24} m_4\{\xi, a, t\} + \\ + j\left(-\omega a + \frac{\omega^3}{6} m_3\{\xi, a, t\}\right). \quad (16)$$

Відомо [1-3,5], що ймовірнісні властивості випадкового процесу характеризують за допомогою n-мірної функції розподілу, і тим точніше, чим більшим є n. Іншими словами n-мірна функція розподілу характеризує ймовірнісні властивості випадкового процесу від дискретних аргументів t та x. Цей спосіб визначення випадкової функції не завжди є зручним через свою громіздкість [11]. Залежна функція розподілу теж характеризує ймовірнісні властивості випадкового процесу, але при $n = \infty$, тобто встановлює безперервну функціональну залежність функції розподілу випадкового процесу від аргументів t та x. Тому використання залежної функції розподілу замість її багатомірного аналогу є більш зручним і перспективним.

Таким чином, вищенаведене дозволяє стверджувати, що функція розподілу випадкового процесу може бути незалежною від середнього значення випадкової величини x, а також може залежати від нього. Незалежна функція розподілу не змінює своєї форми незалежно від того, де вона розташована на вісі значень випадкових величин x, тобто в залежності від середнього значення. Залежна функція розподілу навпаки, змінює свою форму в залежності від розташування на вісі значень випадкових величин x, або в залежності від середнього значення.

Багатьом функціям розподілу можна надати параметричну форму, тобто коли аргументами є середнє значення і середнє квадратичне значення. Деякі функції розподілу використовуються тільки в параметричній формі. Параметрична форма функції розподілу є зручною для математичного опису її залежності. Для складної залежності використовується спектральне уявлення функції розподілу з наступним переходом до самої функції розподілу.

Для інженерних розрахунків можна вважати, що залежна функція розподілу в загальному вигляді тотожна n-мірній функції розподілу при n, що прагне до нескінченності. Це дозволяє перейти від n-мірної функції розподілу до одномірної з спрощенням відповідної математичної моделі.

1. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: „Советское радио”, 1974. – 549с. 2. Тихонов В.И.. Статистическая радиотехника. – М: „Радио и связь”, 1982. – 623с. 3. Вентцель Е.С.. Теория вероятностей. – М.: „Наука”, 1969. – 573с. 4. Новицкий П.В., Зограф И.А.. Оценка погрешностей результатов измерений. – Л.: Энергоатомиздат, 1991. – 302с. 5. Филипский Ю.К. Случайные сигналы в радиотехнике. – К. „Вища школа”, 1986. – 125 с. 6. Математическая энциклопедия, Т. 2. Главный редактор И.М. Виноградов. – М.: „Советская Энциклопедия”, 1979. – 1100с. 7. Майстренко В.М. Спектри одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Вісник Національного Технічного Університету „Київський політехнічний інститут”, „Приладобудування – 2003”. – № 26. – С. 145 – 150. 8. Харкевич А.А. Спектры и анализ. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 235с. 9. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: „Советское радио”, 1971. – 671с. 10. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 463с. 11. Майстренко В.М. Залежні функції розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція „Приладобудування – 2004: Стан і перспективи” 20 – 21 квітня 2004 р. м. Київ, Україна, Збірка наукових праць – С. 138 – 139. 12. Майстренко В.М. Дослідження спектрів одномірних функцій розподілу випадкових процесів // Третя науково-технічна конференція „Приладобудування – 2004: Стан і перспективи” 20 – 21 квітня 2004 р. м. Київ, Україна, Збірка наукових праць – С. 137 – 138.