УДК 532.075.8

ДО ПИТАННЯ ПРО ВИЗНАЧЕННЯ ЦЕНТРА ТИСКУ РІДИНИ НА ТВЕРДІ ПОВЕРХНІ

М.І. Мердух, Б.І. Навроцький

ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 40098, e-mail: gidro@nung.edu.ua

Наведено рівняння для визначення положення центра тиску рідини на плоскі тверді поверхні. Розглядаються випадки, коли над вільною поверхнею рідини існує надлишковий тиск або вакуум.

Дослідження проведені на основі відомої в механіці теореми Вариньйона. Зроблено порівняння з результатами, які виходять з поняття п'єзометричної площини. Отримані рівняння можуть бути використані при дослідженні стійкості та надійності гідравлічних споруд та обладнання.

Показано, що такі дослідження проводяться з умови рівності нулю суми моментів діючих сил. Обґрунтовано необхідність знаходження центра тиску рідини на тверду поверхню, оскільки момент результуючої гідравлічної сили залежить від розташування центра тиску. Наведені рівняння дають змогу визначити місце розташування точки прикладання результуючої гідравлічної сили по висоті змоченої частини плоскої твердої поверхні з врахуванням надлишкового тиску або вакууму над вільною поверхнею рідини. Що стосується розташування центра тиску по горизонталі, то він знаходиться на осі симетрії поверхні.

Ключові слова: центр маси, надлишковий тиск, вакуум, вільна поверхня, п'єзометрична площина.

Приведены уравнения для определения положения центра давления жидкости на плоские твердые поверхности. Рассматриваются случаи наличия над свободной поверхностью жидкости избыточного давления или вакуума.

Исследования проведены на основании известной в механике теоремы Вариньйона. Результаты исследований сравнены с результатами, которые исходят из понятия пьезометрической плоскости. Полученные уравнения могут быть использованы при исследовании стойкости и надежности гидравлических сооружений и оборудования.

Показано, что исследования проводят при условии равенства нулю суммы моментов действующих сил. Обоснована необходимость поиска центра давления жидкости на твердую поверхность, так как момент результирующей гидравлической силы зависит от расположения центра давления. Приведенные уравнения позволяют определить расположение точки приложения результирующей гидравлической силы по высоте смоченной части плоской твердой поверхности с учетом избыточного давления или вакуума над свободной поверхностью жидкости. Что касается центра давления по горизонтали, то он находится на оси симметрии поверхности.

Ключевые слова: центр массы, избыточное давление, вакуум, свободная поверхность, пьезометрическая площадь.

Equations for determining the position of the centre of liquid pressure over the flat hard surfaces have been given. Cases when there exists excessive pressure or vacuum over free liquid surface are considered. The research has been conducted on the basis of the well known in mechanics Varignon's theorem. The results have been compared taking into account such term as piezometric surface. The obtained equations can be used in testing the stability and reliability of hydraulic structures and equipment.

It has been shown that such research is conducted provided that the sum of the moments of active forces equals to zero. The center of liquid pressure on the flat hard surface has been proved to be indispensable, as the moment of resultant and hydraulic force depends on the location of the center of pressure.

Given equations allow us to determine the location of the application point of resulting hydraulic force according to the height of the flat surface wet section accounting for excessive pressure or vacuum over the free liquid surface. Concerning the location of the pressure center horizontally it is situated on the surface symmetry axis.

Keywords: center of mass, excessive pressure, vacuum, free surface, piezometric surface.

Постановка проблеми. Рідина, що контактує з твердими поверхнями, спричиняє відповідне гідравлічне навантаження на них. Таке навантаження діє на стінки нафтопродуктопроводів, поверхні різних гідротехнічних споруд (дамб, гребель і т.п.), стінки ємностей для зберігання нафти чи нафтопродуктів (резервуарів, цистерн тощо), корпуси гідравлічного обладнання, як, наприклад, насоси, гідродвигуни чи гідроапаратура, поверхні гідравлічних затворів та кришок тощо. Тож результати розрахунку конструктивних розмірів гідравлічних споруд чи обладнання, залежатимуть від правильної оцінки величини гідравлічного навантаження, характеру його розподілу по вказаних поверхнях.

Зрозуміло, що товщина стінок трубопроводу для перекачування нафти та нафтопродуктів, матеріал труб або листів для монтажу резервуарних ємностей, зварні з'єднання, кріплення різних кришок (наприклад, люків на резервуарах і т.д.) насамперед визначатимуться величиною тиску, що створює рідке середовище, тобто нафта чи нафтопродукт. Помилково визначені величини гідравлічного навантаження дадуть неправильні конструктивні розміри. Занижені результати не забезпечать відповідної міцності гідравлічного обладнання і можуть призвести до аварійних ситуацій, а завищені значення гідравлічних навантажень призведуть до невиправданого запасу міцності і перевитрат матеріалу.

Гідравлічні сили на тверді поверхні, що спричиняє рідина, не є локальними (зосередженими), а розподілені по поверхні рівномірно або нерівномірно. Для горизонтальних поверхонь, які є поверхнями рівного тиску, сили розподілені рівномірно. Нерівномірно розподілені сили мають місце на поверхнях вертикальних, або нахилених під певним кутом до горизонту. Наростають вони зверху вниз за лінійним законом.

Щодо питань дослідження стійкості та надійності поверхонь, що контактують з рідиною, тут суттєве значення має також розташування точки прикладання рівнодіючої сили тиску рідини так званого центра тиску.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В гідравлічній літературі (наприклад, [1]) здійснюється пошук стосовно величини сумарного гідравлічного навантаження з боку рідини на плоскі та криволінійні поверхні, а також розглядаються питання щодо знаходження положення центра тиску. Для визначення розташування центра тиску пропонуються аналітичні залежності та графоаналітичні методи. Проте наводяться лише загальні підходи до вирішення таких задач.

Виділення невирішених раніше проблем. Стаття присвячена пошуку конкретних розв'язків даної проблеми з метою спрощення розрахунків, пов'язаних з знаходженням центра тиску рідин на тверді поверхні з врахуванням надлишкового тиску або вакууму над вільною поверхнею рідини. Поставлене завдання передбачає отримання рівняння для визначення положення точки прикладання результуючої сили тиску на плоскі тверді поверхні прямокутної та округлої форми.

Висвітлення основного матеріалу. Результуюча сила тиску рідини на плоскі тверді поверхні визначається добутком величини надлишкового тиску в центрі маси змоченої частини поверхні на площу цієї поверхні [1]:

$$F = p_C^{н} \cdot S = \left(p_o^{н} + \rho g h_C\right) \cdot S\,, \qquad (1)$$

де: $p_C^{н}$ – надлишковий тиск в центрі маси змоченої частини поверхні (частини поверхні, що контактує з рідиною);

S – площа змоченої поверхні;

$p_o^{н}$ – надлишковий тиск на вільній поверхні рідини;

ρ – густина рідини за відповідної температури;

h_C – глибина занурення центра маси змоченої частини поверхні;

g – прискорення вільного падіння (g =9,81 м/с^2).

Аналогічно визначається горизонтальна складова сили тиску і на криволінійні поверхні, при цьому для розрахунку береться площа вертикальної проекції.

Якщо тиск по поверхні розподілений рівномірно, що буде мати місце для горизонтальних плоских поверхонь, то точка прикладання рівнодіючої сили тиску (центр тиску) *D* співпадає з центром маси поверхні *C*. Для поверхонь вертикальних чи нахилених під певним кутом тиск розподілений нерівномірно; його інтенсивність наростає зверху вниз за лінійним законом, тому центр тиску знаходиться нижче центра маси поверхні на величину, що визначається формулою [1]:

$$CD = \frac{I_C}{S \cdot l_C}\,, \qquad (2)$$

де: CD – відстань між центром маси та центром тиску;

I_C – момент інерції площини S відносно осі, проведеної через центр маси поверхні; для прямокутної поверхні $I_C = \dfrac{BH^3}{12}$;

l_C – відстань в площині стінки від рівня рідини до центра маси; для вертикальної стінки $l_C = h_C$.

Згідно з рівнянням (1) результуюча сила тиску F може бути представлена сумою двох паралельних складових:

$$F = F_0 + F_1\,,$$

де: $F_0 = p_o^{н} \cdot S$ – сила від надлишкового тиску на поверхні рідини;

$F_1 = \rho g h_C \cdot S$ - сила тиску самої рідини.

Оскільки тиск на поверхні рідини згідно з законом Паскаля передається в усі точки поверхні без змін (однаково), то складова сила F_0 буде прикладена в центрі маси змоченої поверхні (рис. 1). Складова F_1 прикладена нижче центра маси в точці D_1 і для прямокутної поверхні глибина $h_{D1} = \dfrac{2}{3}H$. Тоді точка прикладання результуючої сили тиску F буде знаходитись між центром маси поверхні C та центром тиску складової F_1 (точка D_1).

Розташування центру тиску сумарної сили F (точка D) може бути встановлено згідно відомої в механіці теореми Вариньйона [1], за якою момент рівнодіючої сили відносно будь-якої осі рівний сумі моментів її складових відносно тієї ж осі. Будемо розглядати моменти сил відносно осі, проведеної через точку *E*.

Таким чином:

$$F_0 \cdot h_C + F_1 \cdot h_{D_1} = F \cdot h_D\,. \qquad (3)$$

Введемо в рівняння (3) відповідні залежності для сил F_0, F_1, F та розмірів h_C і h_{D_1} вертикальної прямокутної стінки:

$$p_0^{н} \cdot BH \cdot \frac{H}{2} + \rho g \frac{H}{2} \cdot BH \cdot \frac{2}{3}H = \left(p_0^{н} + \rho g \frac{H}{2}\right) BH \cdot h_D.$$

Після скорочень з цього рівняння отримаємо:

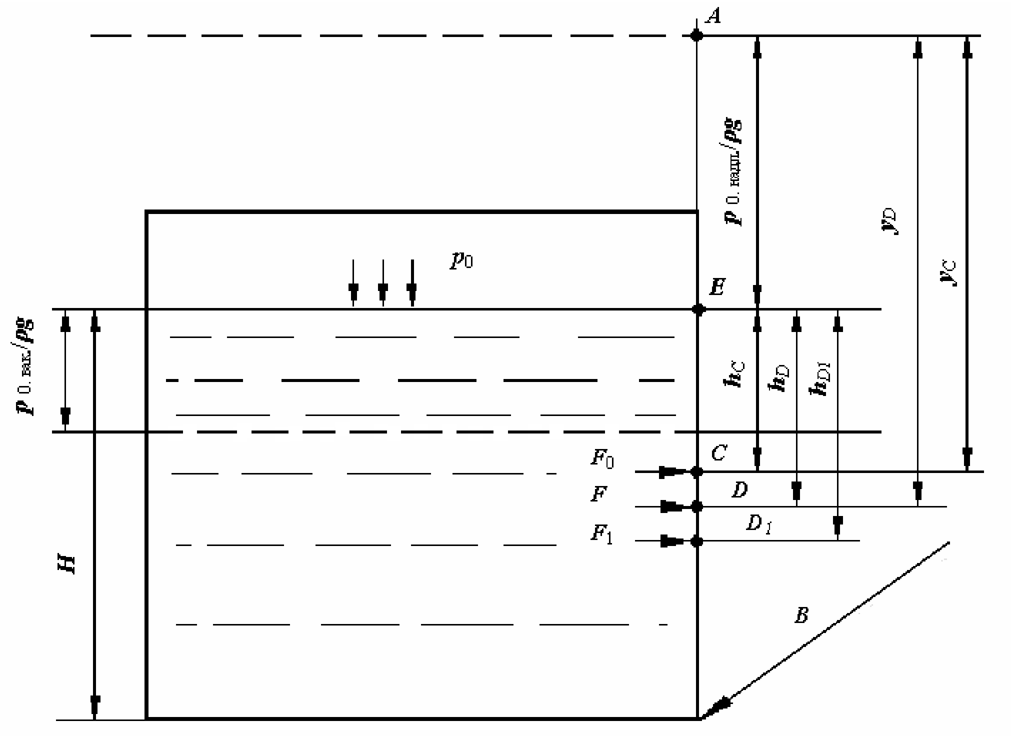

Рисунок 1 – Сили тиску на змочену плоску поверхню

$$h_D = \frac{2\rho g H^2 + 3p_0^{н} \cdot H}{3\left(2p_0^{н} + \rho g H\right)}. \quad (4)$$

У випадку, коли вільна поверхня відкрита, надлишковий тиск на вільній поверхні $p_0^{н} = 0$ і з рівняння (4) маємо $h_D = \frac{2}{3}H$, що відповідає дійсності, бо в цьому випадку епюра гідростатичного тиску по стінці має форму прямокутного трикутника і результуюча сила тиску рідини пройде через центр маси епюри, що складає дві третини висоти трикутника.

Якщо ж на вільній поверхні рідини існує вакуум, то надлишковий тиск від'ємний ($p_0^{н} = -p_0^{в}$) і рівняння (4) можна записати так:

$$h_D = \frac{2\rho g H^2 - 3p_0^{в} \cdot H}{3\left(\rho g H - 2p_0^{в}\right)}. \quad (5)$$

Рівняння (5) дає можливість визначити положення точки прикладання результуючої сили тиску рідини за наявності вакууму над рідиною.

Величина сили тоді за рівнянням (1) буде рівна:

$$F = \left(-p_0^{в} + \rho g h_C\right) \cdot S. \quad (6)$$

Якщо при цьому результат буде від'ємним, то це означатиме, що напрям сили протилежний до вказаного на рисунку.

Питання про положення центра тиску може бути вирішено також, виходячи з поняття п'єзометричної площини, яка знаходиться вище вільної поверхні на відстані $\frac{p_0^{н}}{\rho g}$ при надлишковому тиску на вільній поверхні або нижче на величину $\frac{p_0^{в}}{\rho g}$ при вакуумі над рідиною. Тоді відстань від лінії перетину п'єзометричної площини (точка A) до центра тиску буде визначатися рівнянням:

$$y_D = y_C + \frac{I_C}{S \cdot l_C'}, \quad (7)$$

де: y_C – відстань від цієї ж лінії до центра маси змоченої поверхні;

l_C' – відстань в площині стінки від цієї ж лінії до центра маси мокрої поверхні.

Для вертикальної прямокутної поверхні у випадку надлишкового тиску маємо:

$$y_D = h_D + \frac{p_0^{н}}{\rho g}; \quad y_C = l_C' = \frac{H}{2} + \frac{p_0^{н}}{\rho g}. \quad (8)$$

При вакуумі, відповідно:

$$y_D = h_D - \frac{p_0^{в}}{\rho g}; \quad y_C = l_C' = \frac{H}{2} - \frac{p_0^{в}}{\rho g}. \quad (9)$$

Якщо ці співвідношення ввести в рівняння (7), то у випадку надлишкового тиску на вільній поверхні будемо мати:

$$h_D = \frac{H}{2} + \frac{I_C}{HB\left(\frac{H}{2} + \frac{p_0^{н}}{\rho g}\right)}, \quad (10)$$

а при вакуумі:

$$h_D = \frac{H}{2} + \frac{I_C}{HB\left(\frac{H}{2} - \frac{p_0^в}{\rho g}\right)}. \quad (11)$$

Якщо до рівняння (10) та (11) ввести вираз $I_C = \frac{BH^3}{12}$, вони набудуть такого вигляду:

за надлишкового тиску:

$$h_D = \frac{H}{2} + \frac{H^2}{12\left(\frac{H}{2} + \frac{p_0^н}{\rho g}\right)}; \quad (12)$$

при вакуумі над вільною поверхнею:

$$h_D = \frac{H}{2} + \frac{H^2}{12\left(\frac{H}{2} - \frac{p_0^в}{\rho g}\right)}. \quad (13)$$

Рівняння (12) і (13) після спрощення перетворюються в наведені вище залежності (4) і (5).

У випадку, якщо тверді поверхні не вертикальні, а нахилені під певним кутом, розміри H та h_D в формулах (4) і (5) відкладаються від рівня рідини в площини стінки.

А для поверхонь, розташованих нижче рівня, надлишковий тиск в формулі (4) визначається глибиною до верхньої кромки поверхні.

Висновки, практичне значення і перспектива подальших досліджень. Отримані в результаті досліджень рівняння (4) і (5) дають можливість встановити положення центра тиску рідини на змочену поверхню прямокутної форми з врахуванням надлишкового тиску над вільною поверхнею рідини або вакууму.

Аналіз наведених рівнянь (4) і (5) свідчить, що у випадку відкритої вільної поверхні (надлишковий тиск і вакуум відсутні) відстань від рівня рідини до центра тиску $h_D = \frac{2}{3}H$.

Якщо надлишковий тиск або вакуум незначні в порівнянні з тиском, що створює сама рідина, – розмір $h_D \cong \frac{2}{3}H$, а коли значення надлишкового тиску або вакууму перевищують гідростатичний тиск стовпа рідини, центр тиску буде ближчим до центра маси змоченої частини поверхні.

Далі розглянемо вирішення цих питань для округлої плоскої поверхні діаметром D. Для такої поверхні складова сила F_0 від надлишкового тиску на поверхні рідини буде рівна:

$$F_0 = p_0 \frac{\pi D^2}{4}. \quad (14)$$

Глибина розташування центра маси округлої поверхні $h_C = \frac{D}{2}$. Складова F_1 від гідростатичного тиску рідини:

$$F_1 = \rho g h_C \cdot S = \rho g \frac{D}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4} = \rho g \frac{\pi D^3}{8}. \quad (15)$$

Центр тиску цієї складової буде знаходитись на глибині:

$$h_{D_1} = \frac{D}{2} + \frac{2I_C}{SD}. \quad (16)$$

Момент інерції круга відносно осі, проведеної через центр маси, –

$$I_C = \frac{\pi D^4}{64}. \quad (17)$$

Тоді формула (16) буде виглядати так:

$$h_{D_1} = \frac{D}{2} + \frac{\pi D^4 \cdot 4 \cdot 2}{64 \cdot \pi D^2 \cdot D} = \frac{5}{8}D. \quad (18)$$

Результуюче зусилля буде рівне:

$$F = \left(p_0^н + \rho g \frac{D}{2}\right) \cdot \frac{\pi D^2}{4}. \quad (19)$$

Згідно з рівнянням (3) будемо мати:

$$p_0^н \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{D}{2} + \rho g \frac{D}{2} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot \frac{5}{8}D = \left(p_0^н + \rho g \frac{D}{2}\right) \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot h_D. \quad (20)$$

Після скорочень з рівняння (20) отримаємо:

$$h_D = \frac{\left(p_0^н \cdot D + 5\rho g D^2\right)}{8\left(2p_0^н + \rho g D\right)}. \quad (21)$$

При вакуумі над вільною поверхнею глибина находження точки прикладання результуючої сили буде:

$$h_g = \frac{5\rho g D^2 - p_0^в D}{8\left(\rho g D - 2p_0^в\right)}. \quad (22)$$

Отримані результати можуть бути використані при розрахунках, пов'язаних з дослідженням рівноваги чи стійкості гідравлічних споруд та обладнання. Такі розрахунки виконуються з умови рівності нулю суми діючих моментів. І оскільки момент результуючої гідравлічної сили, як і момент сили взагалі, буде визначатись величиною сили і відстанню від лінії дії сили до відповідної осі, то це залежатиме від положення центра тиску.

В перспективі такі ж дослідження можуть бути проведені для поверхонь іншої геометричної форми (трикутної, трапецієподібної та ін.)

Література

1 Навроцький Б. Механіка рідин / Б. Навроцький, Є. Сухін. – К.: ДІЯ, 2003. – 416 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 24.02.12

Рекомендована до друку професором ***В.Я. Грудзом***