

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РОЗПОДІЛУ ПЛАСТОВОГО ТИСКУ З УРАХУВАННЯМ ФІЗИЧНОЇ НЕОДНОРІДНОСТІ ПЛАСТА

Л.М. Журавчак, А.Є. Струк

Карпатське відділення Інституту геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України,
79060, Львів, вул. Наукова 3б, тел. (0322) 585189, e-mail: lz huravchak@ukr.net

Розглянуто двовимірний пласт довільної форми з заданими на його зовнішньому контурі і межах свердловин умовами першого чи другого роду. При математичному моделюванні нестационарного процесу зміни пластового тиску з урахуванням залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску і постійного коефіцієнта п'єзопровідності поєднано непрямий метод приграничних елементів з перетворенням Кірхгофа і покровою часовою схемою послідовності початкових умов. Для знаходження інтенсивності невідомих джерел, введених в приграничних елементах і апроксимованих константами, одержано систему лінійних алгебраїчних рівнянь для задоволення граничних умов у точках колокації. Проведено різносторонній аналіз розробленого підходу з урахуванням різних залежностей коефіцієнта гідропровідності від шуканого тиску.

Ключові слова: геосередовище із залежними від тиску фізичними характеристиками, нестационарний розподіл тиску в пласті, непрямий метод приграничних елементів, перетворення Кірхгофа.

Рассмотрен двумерный пласт произвольной формы с заданными на его внешнем контуре и границах скважин условиями первого или второго рода. При математическом моделировании нестационарного процесса изменения пластового давления с учетом зависимости коэффициента гидроразрывности от давления и постоянного коэффициента пьезопроводимости совместно применен непрямой метод приграничных элементов (НМПГЕ) с преобразованием Кирхгофа и пошаговой временной схемой последовательности начальных условий. Для нахождения интенсивностей неизвестных источников, введенных в приграничных элементах и аппроксимированных константами, получена система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для удовлетворения граничных условий в точках коллокации. Проведен разносторонний анализ разработанного подхода с учетом разных зависимостей коэффициента гидроразрывности от искомого давления.

Ключевые слова: геосреда с зависимыми от давления физическими характеристиками, нестационарное распределение давления в пласте, непрямой метод приграничных элементов, преобразование Кирхгофа

The two-dimensional free-configuration reservoir with specified conditions of the first or second kind on its outer contour and well boundaries was considered. In mathematical modeling of non-stationary process of reservoir pressure change considering the dependence of hydraulic conductivity coefficient on pressure and constant coefficient of piezo conductivity, an indirect boundary element technique with Kirchhoff transformation and incremental timing sequence diagram of initial conditions, was jointly used. The discrete-continual model for finding the intensity of unknown sources, introduced into near-boundary elements and approximated by constants, was reduced to a system of linear algebraic equations, which were built due to meeting boundary conditions in collocation terms. The versatile analysis of developed approach, considering various dependencies of the coefficient of hydraulic conductivity on pressure, was carried out.

Keywords: geological environment with pressure-dependent physical characteristics, non-stationary process of reservoir pressure change, indirect technique of near-boundary element, Kirchhoff transformation.

Вступ

Практична цінність результатів гідродинамічного дослідження процесів фільтрації залежить від подібності створеної та реальної моделі процесу фільтрації та вибору розрахункової схеми пласта. У підземній гідрогазомеханіці моделюють геолого-фізичні властивості пласта, його геометричну форму і процес вилучення нафти й газу із порід. Основні поширені на сьогодні моделі пласта: однорідного за параметрами, шарово-однорідного (включає два або більше пропластків з різними коефіцієнтами проникності) та зонально-однорідного (включає зони з різними, але, але постійними коефіцієнтами проникності) не завжди адекватно описують реальні процеси, що відбуваються у процесі видобування нафти і газу, оскільки не враховують взаємовпливу характеристик процесу і середовища.

Розв'язання цих проблем ґрунтується на знаходженні розподілу тиску в однорідних та

кусково-однорідних об'єктах довільної форми, тобто побудові розв'язків дво- чи тривимірних нестационарних задач, описаних рівняннями п'єзопровідності (відомими в математичній фізиці як рівняння Фур'є або теплопровідності) та відповідними крайовими й початковими умовами. Лінійні математичні моделі, побудовані у допущенні кусково-сталої залежності фізичних характеристик матеріалів від координат, не завжди адекватно описують реальні процеси. Достовірніші моделі, що враховують вплив тиску на коефіцієнти динамічної в'язкості, об'ємної пружності та проникності середовищ (так звану фізичну неоднорідність), приводять до нелінійних крайових задач математичної фізики, для розв'язання яких переважно застосовують аналітико-чисельні та чисельні методи [1-5]. Одним з підходів до розв'язання таких задач, є виділення оператора, що характеризує вплив нелінійності і застосування до нього ітеративних методів з використання дискретизації

області нелінійності [6, 7]. Інший, більш ефективний, шлях розв'язування стаціонарних та нестаціонарних задач у випадку простої нелінійності (коли коефіцієнт п'єзопровідності незначно залежить від тиску і його можна вважати сталим) полягає у використанні перетворення Кірхгофа, яке зводить нелінійне рівняння до лінійного [8-12]. Зокрема, в [10] для знаходження розв'язків стаціонарних задач теплопровідності з урахуванням залежності коефіцієнта теплопровідності від температури перетворення Кірхгофа поєднано з прямим методом граничних елементів (МГЕ). У [11] розглянуто просторову нестаціонарну задачу для паралелепіпеда з крайовою умовою першого роду та залежним від температури коефіцієнтом теплопровідності і для визначення температурного поля запропоновано підходи, які ґрунтуються на спільному використанні змінної Кірхгофа, непрямих методів граничних (МГЕ) або приграничних елементів (МПГЕ), фундаментального розв'язку нестаціонарного рівняння теплопровідності та покрової зміни часу. У [12] розглянуто тіло, ускладнене наявністю в ньому локальної області з нелінійною поведінкою матеріалу, та розроблено алгоритм моделювання розв'язку змішаної крайової задачі теплопровідності, який ґрунтується на використанні фундаментального розв'язку рівняння Лапласа для необмеженого середовища, непрямих МГЕ або МПГЕ, перетворенні Кірхгофа та модифікованому методі Ньютона розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Формулювання задачі

Розглянемо однорідний за параметрами пласт, змодельований опуклою двовимірною областю Ω з довільною криволінійною межею Γ_z , що містить L свердловин радіусом R з контурами Γ_{cl} ($l=1, \dots, L$). Фільтрацію (за винятком випадків дроселювання чи запомповування в пласт гарячих теплоносіїв) розглядають як ізотермічний процес, приймаючи, що температура флюїду дорівнює температурі пласта на глибині його залягання в надрах Землі, оскільки під час фільтрації флюїд контактує з великою масою пористою середовища і між ними відбувається постійний теплообмін, що спричинює незначну зміну його температури. Фізичні характеристики краплинних рідин, зокрема, їх динамічна в'язкість, об'ємна пружність та проникність (за тисків вище тиску насичення газом) залежать від тиску $p = p(x, \tau)$, звичайно, збільшуючись у випадку його зростання, що може бути враховано експоненціальними залежностями в разі значних його змін (до 100 МПа)

$$\mu(p) = \mu_0 e^{a_\mu(p-p_\mu)}, \quad \beta^*(p) = \beta_0^* e^{a_\beta(p-p_\beta)},$$

$$k(p) = k_0 e^{a_k(p-p_k)}, \quad (1)$$

або у вузьких інтервалах зміни тиску їх наближеними аналогами (лінійними рівняннями, одержаним після розкладу в ряди (1) та утримання перших двох членів розкладу)

$$\mu(p) = \mu_0(1 + a_\mu(p - p_\mu)),$$

$$\beta^*(p) = \beta_0^*(1 + a_\beta(p - p_\beta)), \quad (2)$$

$$k = k_0(1 + a_k(p - p_k)),$$

іє μ_0, β_0^*, k_0 – коефіцієнти динамічної в'язкості, об'ємної пружності та проникності відповідно за тиску p_μ, p_β, p_k ;

a_μ, a_β, a_k – експериментальні коефіцієнти, що залежить від складу рідин (п'єзоефіцієнти в'язкості, об'ємної пружності, проникності) [13].

Залежності коефіцієнтів динамічної в'язкості рідини μ , пружної ємності насиченого пласта β^* та проникності k (1), (2) запишемо в загальному вигляді як неперервні функції від шуканого тиску $p = p(x, \tau)$, тобто

$$\mu(p) = \mu_0(1 + \mu_p(p)S_+(p - p_\mu)),$$

$$\beta^*(p) = \beta_0^*(1 + \beta_p^*(p)S_+(p - p_\beta)), \quad (3)$$

$$k(p) = k_0(1 + k_p(p)S_+(p - p_k)).$$

де $S_+(z) = 1$ при $z > 0$, $S_+(z) = 0$ при $z \leq 0$.

Для знаходження невідомого тиску $p(x, \tau)$ маємо нелінійне вихідне рівняння

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon(p) \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial x_i}) - \beta^*(p) h \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad (4)$$

граничні умови

$$p(x, \tau) = p_z(x, \tau), \quad (x, \tau) \in \Gamma_z \times T, \quad (5)$$

$$\text{або } -\varepsilon(p) \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial n(x)} = 0, \quad (x, \tau) \in \Gamma_z \times T, \quad (6)$$

$$p(x, \tau) = p_l(x, \tau), \quad (x, \tau) \in \Gamma_{cl} \times T, \quad (7)$$

$$\text{або } -\varepsilon(p) \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial n(x)} = \frac{q_l(x, \tau)}{2\pi R}, \quad (x, \tau) \in \Gamma_{cl} \times T, \quad (8)$$

початкові умови:

$$p(x, 0) = p_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (9)$$

Тут $x = (x_1, x_2)$;

τ – час;

$$\oint_{\Gamma_{cl}} q_l(x, \tau) d\Gamma_{cl}(x) = Q_l(\tau), \quad Q_l(\tau) \text{ – дебіт}$$

свердловини; $l = 1, \dots, L$;

$n(x) = (n_1(x), n_2(x))$ – вектор зовнішньої одиничної однозначно визначеної нормалі до границі $\Gamma = \Gamma_z \cup_{l=1}^L \Gamma_{cl}$;

$$\varepsilon(p) = h \frac{k(p)}{\mu(p)};$$

h – товщина пласта.

У цьому випадку після введення прямого

$$\mathcal{G}(x, \tau) = K(p(x, \tau)) = \int_{p_h}^{p(x, \tau)} \varepsilon(\zeta) d\zeta \quad (10)$$

та оберненого

$$K^{-1}(\mathcal{G}(x, \tau)) = p(x, \tau) \quad (11)$$

перетворень Кірхгофа для знаходження змінної Кірхгофа $\vartheta(x, \tau)$ замість (3)-(9) одержимо задачу:

$$\Delta \vartheta(x, \tau) - \frac{1}{\kappa(p)} \frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial \tau} = 0, (x, \tau) \in \Omega \times T, \quad (12)$$

$$\vartheta(x, \tau) = K(p_z(x, \tau)) = \vartheta_z(x, \tau)$$

$$\text{або } -\frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial n(x)} = 0, (x, \tau) \in \Gamma_z \times T, \quad (13)$$

$$\vartheta(x, \tau) = K(p_l(x, \tau)) = \vartheta_l(x, \tau)$$

$$\text{або } -\frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial n(x)} = \frac{q_l(x, \tau)}{2\pi R},$$

$$(x, \tau) \in \Gamma_{cl} \times T, l = 1, \dots, L, \quad (14)$$

$$\vartheta(x, \tau) = K(p_0(x)) = \vartheta_0(x), x \in \Omega, \quad (15)$$

де $\Delta = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ – оператор Лапласа,

$p_h = \min(p_k, p_\mu, p_\beta)$ – характеристичний тиск,

$$\kappa(p) = \frac{k(p)}{\mu(p)\beta^*(p)} \text{ – коефіцієнт п'єзо-проводності.}$$

Здійснивши припущенні, що коефіцієнт п'єзопровідності $\kappa(p)$ пласта незначно залежить від шуканої функції і його можна прийняти постійним і рівним κ_0 , рівняння (10) значно спрощується:

$$P_{0\tau}(\vartheta(x, \tau)) = \Delta \vartheta(x, \tau) - \frac{1}{\kappa_0} \frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial \tau} = 0, (x, \tau) \in \Omega \times T, \quad (16)$$

задача (12)-(15) стає лінійною, що дозволяє використати методику, розроблену в [5], тут

$$\kappa_0 = \frac{k_0}{\mu_0 \beta_0}.$$

Побудова інтегральних зображень розв'язку задачі непрямым методом приграничних елементів

Згідно з основними положеннями прямого методу приграничних елементів (НМПГЕ) [5] у зовнішній приграничній до Ω багатозв'язній області $G = G_z \cup_{l=1}^L G_l$ введемо невідомі функції $\varphi(x, \tau)$, які описують розподіл невідомих фіктивних джерел тиску. Після розширення області визначення функції $\vartheta(x, \tau)$ на всю площину \mathbf{R}^2 , рівняння (16) перепишемо у вигляді

$$P_{0\tau}(\vartheta(x, \tau)) = -\varphi(x, \tau)\chi_G - \vartheta_0(x)\delta(\tau), (x, \tau) \in \mathbf{R}^2 \times T, \quad (17)$$

де χ_G – характеристична функція приграничної області G , тобто $\chi_G = 1$ при $x \in G$, $\chi_G = 0$ при $x \notin G$,

$\delta(z)$ – дельта-функція Дірака.

Оскільки для оператора $P_{0\tau}(\vartheta(x, \tau))$ існує й відомий фундаментальний розв'язок $U(x, \tau, o, \xi_4)$, то інтегральне зображення розв'язку рівняння (17) для змінної Кірхгофа та похідної від неї за нормаллю з урахуванням початкового розподілу (15) має вигляд $((x, \tau) \in \mathbf{R}^2 \times T)$:

$$\vartheta(x, \tau) = F_\tau(x, \tau, U) + b_\tau(x, \tau, U), \quad (18)$$

$$-\frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial n(x)} = F_\tau(x, \tau, Q) + b_\tau(x, \tau, Q), \quad (19)$$

$$\text{де } U(x, \tau, o, \xi_4) = \frac{\exp(-\frac{r^2}{4\kappa_0(\tau - \xi_4)})}{4\pi\kappa_0(\tau - \xi_4)},$$

$$o = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbf{R}^2, \xi_4 \in T,$$

$$r^2 = \sum_{i=1}^2 (x_i - \xi_i)^2,$$

$$Q(x, \tau, o, \xi_4) = -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial U(x, \tau, o, \xi_4)}{\partial x_i} n_i(x) =$$

$$= \frac{\exp(-\frac{r^2}{4\kappa_0(\tau - \xi_4)})}{8\pi\kappa_0(\tau - \xi_4)} \sum_{i=1}^2 (x_i - \xi_i) n_i(x);$$

$$F(x, \tau, \Phi) = \int_{0G} \int_{0G} \Phi(x, \tau, o, \xi_4) \varphi(o, \xi_4) dG(o) d\xi_4, \quad (20)$$

$$b(x, \tau, \Phi) = \int_{\Omega_p} \Phi(x, \tau, o, 0) \vartheta_0(o) d\Omega_p(o), \quad (21)$$

$\Phi \in \{U, Q\}$, $\Omega_p = \Omega \cup \Omega_0$, Ω_0 – багатозв'язна область продовженої початкової умови [5], в якій початковий тиск лінійно спадає від значення на межі Γ до нульового. Зауважимо, що Ω_0 та G не повинні співпадати, хоч і можуть.

Спрямувавши в (18), (19) x з середини області Ω до межі Γ для задоволення умов (13), (14), одержимо граничні інтегральні рівняння (ГІР), які зв'язують невідомі $\varphi(o, \xi_4)$ з відомими $\vartheta_0(o)$ та заданими функціями $\vartheta_z(x, \tau)$, $\vartheta_l(x, \tau)$, $q_l(x, \tau)$:

$$F(x, \tau, U) = \vartheta_z(x, \tau) - b(x, \tau, U) \text{ або}$$

$$F(x, \tau, Q) = -b(x, \tau, Q), (x, \tau) \in \Gamma_z \times T, \quad (22)$$

$$F(x, \tau, U) = \vartheta_l(x, \tau) - b(x, \tau, U) \text{ або}$$

$$F(x, \tau, Q) = \frac{q_l(x, \tau)}{2\pi R} - b(x, \tau, Q),$$

$$(x, \tau) \in \Gamma_{cl} \times T, l = 1, \dots, L. \quad (23)$$

Побудова дискретно-континуальної моделі

Оскільки виконати аналітичне інтегрування у рівняннях (22), (23) для прикладних задач внаслідок довільності області Ω практично неможливо, здійснимо просторово-часову

дискретизацію за допомогою таких кроків. Області G , Ω та Ω_0 розіб'ємо відповідно на криволінійні елементи другого порядку з вісьмома вузлами, що не перетинаються, G_v ($v=1, \dots, V$), Ω_q ($q=1, \dots, Q$), Ω_{0q} ($q=1, \dots, Q_0$),

причому $V = V_z + \sum_{l=1}^L V_l$. Часовий промінь T

дискретизуємо на однакові інтервали $T_k = [\tau_{k-1}, \tau_k]$ ($k=1, 2, \dots, \tau_0=0$) і в межах кожного T_k ($k=1, \dots, K, K>1$) функції $\varphi_v(x, \tau)$, які описують розподіл фіктивних джерел тиску в межах елементів G_v , апроксимуємо постійними d_v^k . Дискретно-континуальну модель побудуємо для покрової часової схеми – схеми послідовності початкових умов (СПІУ). Кожний крок за часом T_k розглянемо як нову задачу, тобто уведемо локальний час $\tilde{\tau} = \tau - (k-1)\Delta\tau$ ($\Delta\tau$ – величина часового приросту) і обчислені в кінці $(k-1)$ -го часового інтервалу значення $\vartheta(x, (k-1)\Delta\tau)$ у внутрішніх точках використано як початкові для наступного k -го кроку.

Оператори $F(x, \tau, \Phi)$ (20) та $b(x, \tau, \Phi)$ (21) після просторово-часової дискретизації для K -го кроку ($(K-1)\Delta\tau < \tau \leq K\Delta\tau$, $0 < \tilde{\tau} \leq \Delta\tau$) отримаємо у вигляді

$$b^K(x, \tilde{\tau}, \Phi) = \sum_{q=1}^{Q+Q_0} \int_{\Omega_{pq}} \Phi(x, \tilde{\tau}, 0, 0) \vartheta_0^{(K)}(o) d\Omega_{pq}(o),$$

$$F^K(x, \tilde{\tau}, \Phi_\tau) = \sum_{v=1}^V A_v(x, \tilde{\tau}, \Phi_\tau) d_v^K,$$

де $\vartheta_0^{(1)}(o) = \vartheta_0(o)$, $\vartheta_0^{(k)}(o) = \vartheta(o, (k-1)\Delta\tau)$, $k > 1$, $x \in \Omega$, а в Ω_0 лінійно спадає від значення на межі Γ до нульового;

$$A_v(x, \tilde{\tau}, \Phi_\tau) = \int_{G_v} \Phi_\tau(x, \tilde{\tau}, o) dG_v(o),$$

$$\Phi_\tau(x, \tilde{\tau}, o) = \int_0^{\tilde{\tau}} \Phi(x, \tilde{\tau}, o, \xi_4) d\xi_4,$$

$$U_\tau(x, \tilde{\tau}, o) = \frac{1}{4\kappa_0\pi} E_1\left(\frac{r^2}{4\kappa_0\tilde{\tau}}\right),$$

$$Q_\tau(x, \tilde{\tau}, o) = \frac{\exp\left(-\frac{r^2}{4\kappa_0\tilde{\tau}}\right)}{2\kappa_0\pi r^2} \sum_{i=1}^2 (x_i - \xi_i) n_i(x);$$

$$E_1(\beta) = \int_\beta^\infty \frac{\exp(-z)}{z} dz \text{ – інтегро-показникова}$$

функція.

Для задоволення граничних умов використаємо колокаційну методику. Точки колокації виберемо у кінцевий момент часу $\Delta\tau$ у середині кожного граничного елемента Γ_w , $w=1, \dots, V$ ($\Gamma_w \in \Gamma = \Gamma_z \cup_{l=1}^L \Gamma_{cl}$). ГІР (22), (23) після прос-

торово-часової дискретизації для K -го кроку записано у вигляді СЛАР:

$$\sum_{v=1}^V A_v(x^w, \Delta\tau, U_\tau) d_v^K =$$

$$= \vartheta_z(x^w, \Delta\tau) - b^K(x^w, \Delta\tau, U) \text{ або}$$

$$\sum_{v=1}^V A_v(x^w, \Delta\tau, Q_\tau) d_v^K = -b^K(x^w, \Delta\tau, Q),$$

$$x^w \in \Gamma_w \subset \Gamma_z, w=1, \dots, V_z, \quad (24)$$

$$\sum_{v=1}^V A_v(x^w, \Delta\tau, U_\tau) d_v^K =$$

$$= \vartheta_l(x^w, \Delta\tau) - b^K(x^w, \Delta\tau, U) \text{ або}$$

$$\sum_{v=1}^V A_v(x^w, \Delta\tau, Q_\tau) d_v^K = -\frac{q_l(x^w, \Delta\tau)}{2\pi R} -$$

$$- b^K(x^w, \Delta\tau, Q), x^w \in \Gamma_w \subset \Gamma_{cl},$$

$$w = V_z + 1, \dots, V. \quad (25)$$

Для постійного кроку за часом матрицю системи (24), (25) обчислено один раз і збережено у пам'яті комп'ютера. Знайшовши з (24), (25) невідомі d_v^K , використаємо вирази, аналогічні (18), для обчислення змінної Кірхгофа у вузлах, що описують внутрішні елементи $\Omega_q \in \Omega$, в момент часу $\Delta\tau$ [14]:

$$\vartheta^{(K)}(x^{qs}, \Delta\tau) = \sum_{v=1}^V A_v(x^{qs}, \Delta\tau, U_\tau) d_v^K +$$

$$+ b^K(x^{qs}, \Delta\tau, U), x^{qs} \in \Omega_q, s=1, \dots, 8. \quad (26)$$

Знайдені за формулою (26) величини використуємо у (20) для формування правої частини матриці СЛАР на наступних часових кроках, а за допомогою оберненого перетворення Кірхгофа (11) знайдемо шукані величини (тиск і дебіт):

$$p^{(K)}(x, K\Delta\tau) = K^{-1} \left(\sum_{v=1}^V A_v(x, \Delta\tau, U_\tau) d_v^K + b^K(x, \Delta\tau, U) \right),$$

$$- \varepsilon(p) \frac{\partial p(x, K\Delta\tau)}{\partial n(x)} = \sum_{v=1}^V A_v(x, \Delta\tau, Q_\tau) d_v^K + b^K(x, \Delta\tau, Q).$$

Для обчислення інтегралів $A_v(x^w, \Delta\tau, U_\tau)$, $A_v^l(x^{qs}, \Delta\tau, U_\tau)$ використано апроксимацію функції $E_1(z)$ [14]. Далі чисельно знайдено інтеграли по приграничних та внутрішніх елементах, тобто відображено їх на квадрат зі стороною 2 [10, 14], оскільки використання НМПГЕ дозволяє досягнути уніфікації програмного забезпечення [15]: при інтегуванні і по приграничних, і по внутрішніх елементах (в обох випадках – по криволінійних чотирикутниках) використано однакові якобіанні переходу до нових змінних та інтерполяційні функції. На останньому етапі до отриманих інтегралів застосовано формули чисельного інтегрування Гауса [10].

Числові дослідження

Числові дослідження проведено для області Ω , вибраної у вигляді еліпса з півосями $a=200\text{м}$, $b=150\text{м}$, центри свердловин радіусами $R=0.1\text{м}$ мали координати: $(x_1^{(1)}, 0)$, $L=3$, $x_1^{(1)}=0$, $x_1^{(2)}=150$, $x_1^{(3)}=-150$. Зовнішню межу рівномірно розбивали на 16 граничних елементів, а контури свердловин – на два, на кожному з них будували по приграничному елементу товщиною h_z (для зовнішнього контуру) та h_w (для свердловин), тобто СЛАР (24), (25) складалась з 18 (у випадку однієї свердловини) або 22 (у випадку трьох свердловин) рівнянь. Область продовженої початкової умови Ω_0 вибирали багатозв'язною $\Omega_0 = \Omega_{z0} \cup_{l=1}^L \Omega_{l0}$ товщиною h_{z0} на зовнішній межі та товщиною h_{w0} на контурі свердловин. Кількість внутрішніх елементів, на які дискретизували області Ω та Ω_{z0}, Ω_{l0} дорівнювала відповідно 32 та 16, 2 (зрозуміло, що вона ніяк не впливала на розмірність матриці, оскільки інтеграл від початкової умови входить у праву частину вказаної СЛАР).

Розглянуто експоненціальну та лінійну залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску. Використовуючи (1), (2), маємо:

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_0 \exp\left(\frac{\alpha_\varepsilon(p(x, \tau) - p_h)}{p_h}\right), \quad (27)$$

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_0 \left(1 + \alpha_\varepsilon \frac{p(x, \tau) - p_h}{p_h}\right), \quad (28)$$

де $\varepsilon_0 = hk_0 / \mu_0$.

Тоді для прямого перетворення Кірхгофа, застосованого до початкової умови та граничної умови першого роду, одержано вирази

$$K(p_\Gamma) = \varepsilon_0 \frac{p_h}{\alpha_\varepsilon} \left(\exp\left(\frac{\alpha_\varepsilon(p_\Gamma - p_h)}{p_h}\right) - 1 \right),$$

$$K(p_\Gamma) = \frac{\varepsilon_0 p_h}{2\alpha_\varepsilon} \left(\left(1 + \frac{\alpha_\varepsilon(p_\Gamma - p_h)}{p_h} \right)^2 - 1 \right),$$

$$p_\Gamma \in \{ p_0(x), p_z(x, \tau), p_l(x, \tau) \},$$

а для оберненого

$$p(x, \tau) = p_h + \frac{p_h}{\alpha_\varepsilon} \ln\left(\frac{\mathcal{G}(x, \tau)\alpha_\varepsilon}{\varepsilon_0 p_h} + 1\right),$$

$$p(x, \tau) = p_h + \frac{p_h}{\alpha_\varepsilon} \left(\sqrt{1 + \frac{2\mathcal{G}(x, \tau)\alpha_\varepsilon}{\varepsilon_0 p_h}} - 1 \right).$$

Досліджено чотири варіанти граничних умов:

1) зовнішній контур непроникний, відомий дебіт свердловин, тобто задані граничні умови (6), (8);

2) зовнішній контур непроникний, відомий тиск на межі свердловин – умови (6), (7);

3) відомі тиск на зовнішньому контурі та дебіт свердловин – умови (5), (8);

4) відомі тиски на зовнішньому контурі та на межах свердловин – умови (5), (7).

У першому і третьому варіантах дебіт задавали залежним від часу

$q_l(x, \tau) = Q_l(\tau) = (Q_{0l} - 0.00k(\Delta\tau) \cdot) / 84600^2 \text{ м}^3/\text{с}$, у другому і четвертому тиск на межі свердловини теж:

$$p_l(x, \tau) = P_l(\tau) = (P_{0l} - 0.1k(\Delta\tau) \cdot 10^6) / 84600 \text{ Па},$$

при цьому

$$Q_{01} = 30 \text{ м}^3/\text{добу} = 0,000347 \text{ м}^3/\text{с};$$

$$Q_{02} = Q_{03} = 28 \text{ м}^3/\text{добу} = 0.324 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с};$$

$$P_{01} = 16 \cdot 10^6 \text{ Па}; P_{02} = P_{03} = 19 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

у випадку врахування залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску за формулою (28) та

$$P_{01} = 90 \cdot 10^6 \text{ Па}; P_{02} = P_{03} = 95 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

у випадку використання формули (27).

У третьому і четвертому варіантах на зовнішньому контурі задавали постійний тиск $p_z(x, \tau) = P_z = 20 \cdot 10^6 \text{ Па}$ або $P_z = 100 \cdot 10^6 \text{ Па}$ відповідно враховуючи залежності (28) та (27).

У першому і третьому варіантах початковий розподіл тиску у пласті вибирали постійним ($p_0(x) = P_z$), а у другому й четвертому з урахуванням узгодженості початкової та граничних умов моделювали у вигляді функцій:

$$p_0(x) = P_z - \frac{(P_z - P_1(\tau))(r - r_{el})}{(R - r_{el})};$$

у випадку однієї свердловини;

$$p_0(x) = \begin{cases} P_{01}, & R \leq x \leq a/2, \quad -a/2 \leq x \leq -R, \\ P_{02} - \frac{(P_{02} - P_1(\tau))(r - r_{el})}{(R - r_{el})}, & \\ a/2 < x < x_1^{(2)}, \quad x_1^{(3)} < x < -a/2, \\ P_{02}, & x_1^{(2)} \leq x \leq a, \quad -a < x \leq x_1^{(3)}, \end{cases}$$

де r, r_{el} – відстані в полярних координатах до точки x та до відповідної їй на зовнішній межі еліпса.

Фізичні характеристики пласта вибирали такими [13]:

$$k = 1.108 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2; \mu = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с};$$

$$\beta^* = 3.67 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}; h = 18 \text{ м},$$

а характеристичний тиск відповідно враховуючи залежності (28) та (27) –

$$p_h = 15 \cdot 10^6 \text{ Па} \text{ або } 80 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Часовий інтервал $T = \{ \tau : 0 < \tau < 8460000 \}$ с (10 діб) рівномірно розбивали на 10 проміжків, крок за часом вибирали постійним $\Delta\tau = 84600 \text{ с}$. Одиниці вимірювання всіх величин вибрані в системі СІ.

Оскільки похибки, що виникають під час застосування непрямого методу приграничних елементів, зумовлені тільки процедурами апроксимації, дискретизації та числового інтегру-

вання, спочатку досліджували точність задоволення граничних умов на зовнішній межі та на контурах свердловин в різні моменти часу. На рис. 1 зображено абсолютну похибку задоволення граничних умов в момент часу $\Delta t = 84600$ с, внаслідок симетрії задачі результати подані на першій чверті зовнішньої межі та на половині єдиної центральної свердловини для четвертого варіанту задання граничних умов, при цьому $h_z = h_{z0} = 15$, $h_w = h_{w0} = 0.01$.

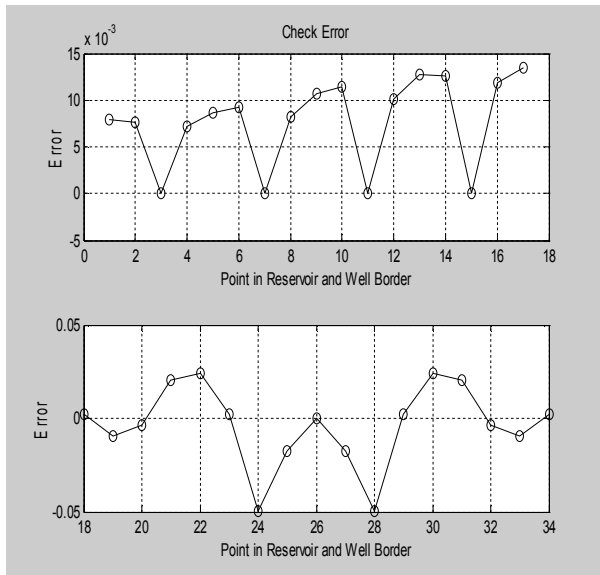


Рисунок 1 – Точність задоволення граничних умов на зовнішньому контурі та на межі свердловини ($\alpha_\varepsilon = 0.1$)

Відзначимо, що у точках колокації похибка відсутня, а найбільша спостерігається з наближенням до кінців граничних елементів. У середині області похибки будуть меншими внаслідок виконання принципу максимуму. На рис. 2 і 3 подано отриманий непрямим методом

приграничних елементів розподіл тиску в пласті з центральною свердловиною з урахуванням залежностей (27) та (28) від другого варіанту задання граничних умов, а на рис. 4 і 5 показано вплив ще двох свердловин, при цьому $h_z = h_{z0} = 17$, $h_w = h_{w0} = 0.01$.

Досліджено вплив коефіцієнта α_ε на зміну тиску у внутрішніх точках пласта, частина результатів з урахуванням лінійної залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску для другого варіанту задання граничних умов подана на рис. 6.

Як бачимо, зростання коефіцієнта гідропровідності пласта спричиняє підвищення тиску у внутрішніх точках пласта.

Висновки

Побудовано математичну модель зміни в часі тиску у двовимірному пласті з криволінійною межею з урахуванням залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску (за сталого коефіцієнта п'єзопровідності) та різних типів граничних умов. Для розв'язання задачі непрямий метод приграничних елементів поєднано з часовою схемою послідовності початкових умов та перетворенням Кірхгофа, що дозволило лінеаризувати вихідну задачу, точно задовольнити рівняння в усій досліджуваній області та контролювати похибку задоволення граничних умов на її межах (внаслідок можливості вибору товщин приграничної області та області продовженої початкової умови, а також кількості приграничних елементів). Рекомендації щодо вибору товщин цих областей можуть бути наступними: для модельних задач з відомими аналітичними розв'язками варто виходити з апостеріорних оцінок отриманих числових результатів, для інших – порівнювати результати обчислень шуканих функцій у певних ділянках границі із заданими на них граничними умовами.

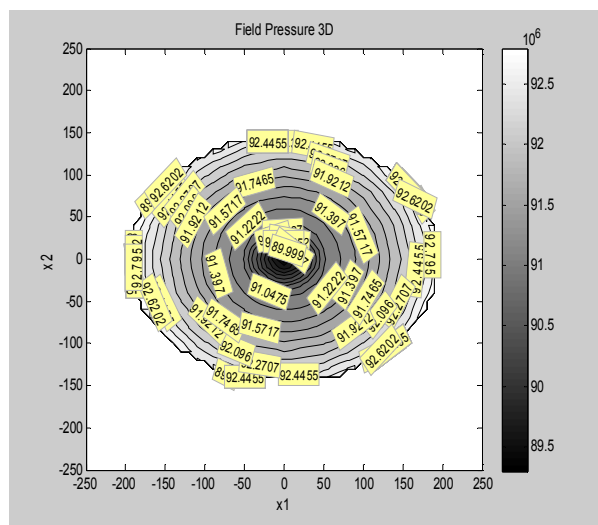
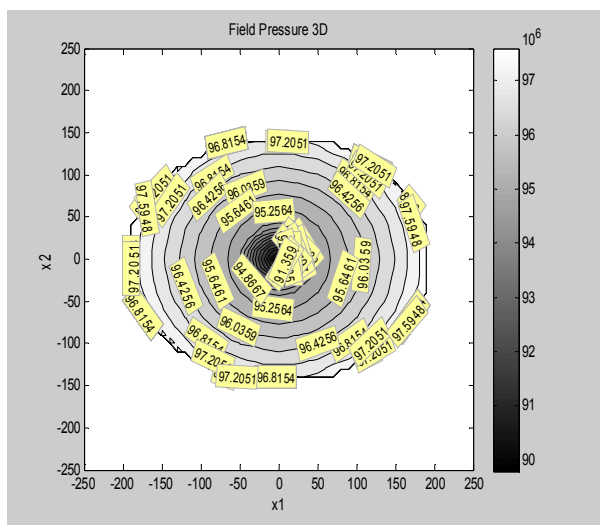


Рисунок 2 – Розподіл тиску в пласті з центральною свердловиною у різні моменти часу: 2 доби (а), 7 діб (б) з урахуванням експоненційної залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску ($\alpha_\varepsilon = 0.1$)

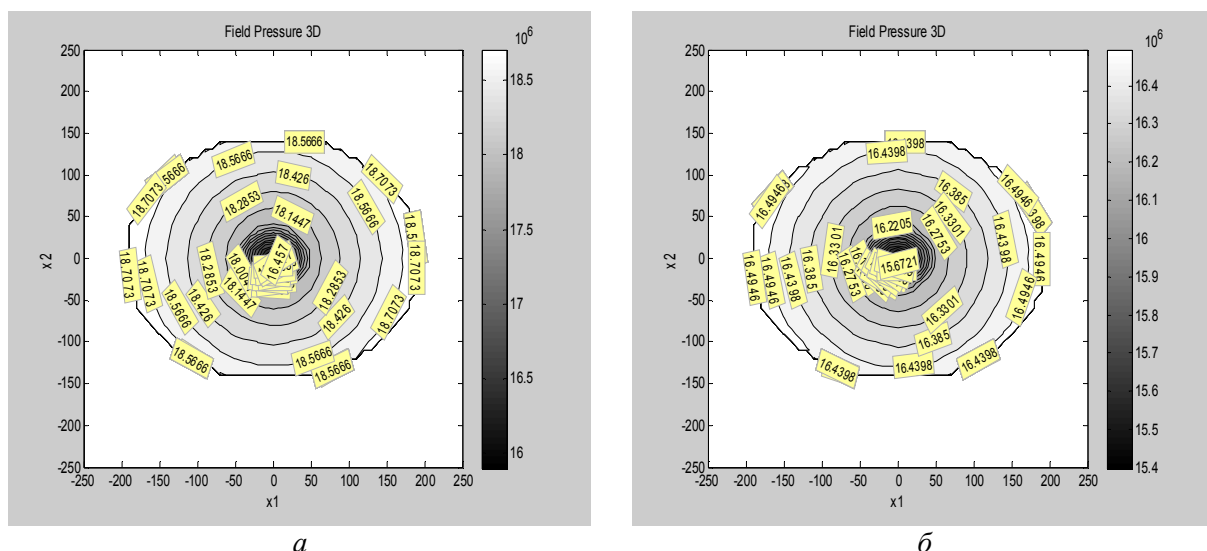


Рисунок 3 – Розподіл тиску в пласті з центральною свердловиною у різні моменти часу: 2 доби (а), 7 днів (б) з урахуванням лінійної залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску ($\alpha_\varepsilon=0.1$)

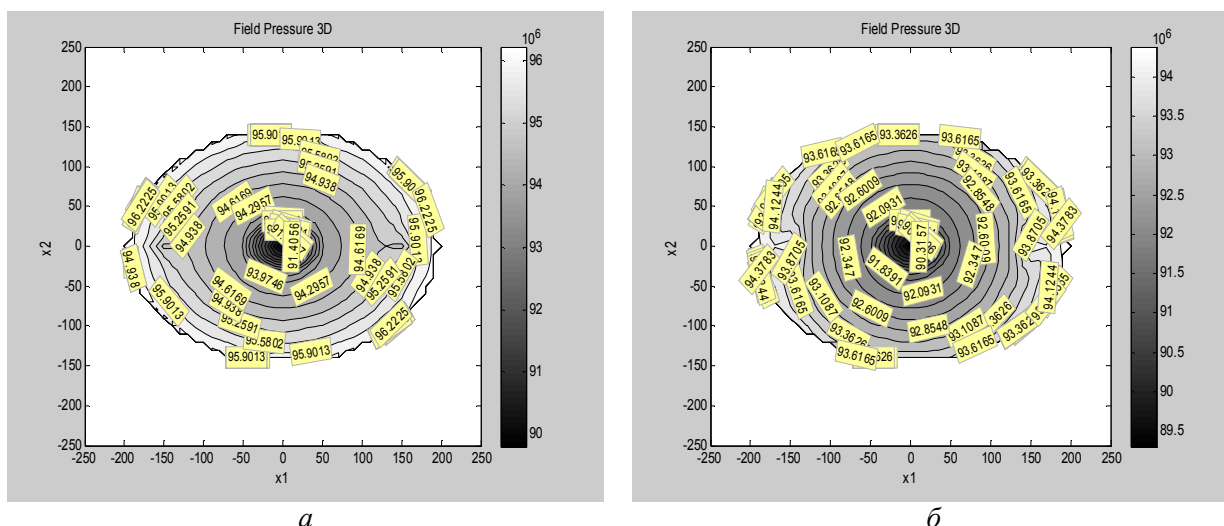


Рисунок 4 – Розподіл тиску в пласті з трьома свердловинами у різні моменти часу: 2 доби (а), 7 днів (б) з урахуванням експоненційної залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску ($\alpha_\varepsilon=0.1$)

Здійснено програмну реалізацію запропонованого чисельно-аналітичного підходу з використанням системи MATLAB та проведено низку досліджень впливу фізичних та часових параметрів на розподіл тиску у пласті. Обчислювальні експерименти підтвердили необхідність урахування залежностей коефіцієнта гідропровідності від тиску, оскільки відносна похибка величин тиску, отриманих з урахуванням цих залежностей і без них, сягає 8-10% і не зменшується з часом.

Розроблена методика може бути легко розширена для розгляду кусково-однорідних середовищ із залежними від тиску фізичними параметрами, що ми і плануємо здійснити в наступних дослідженнях.

Література

1 Бомба А.Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопечкий В.В. – Київ: Наукова думка, 2007 – 292 с.

2 Мирзаджанзаде А.Х. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность / Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н. – Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004. – 606 с.

3 Пивень В.Ф. Теория и приложения математических моделей фильтрационных течений жидкости / Пивень В.Ф. – Орел: Издательство ГОУ ВПО "Орловский государственный университет", Полиграфическая фирма "Картуш", 2006. – 508 с.

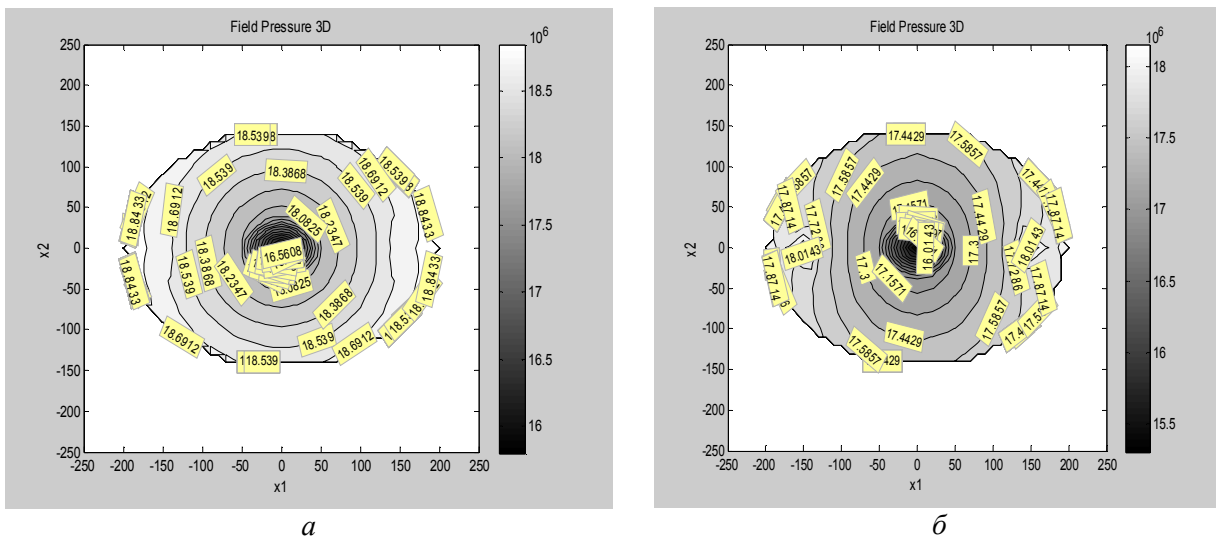


Рисунок 5 – Розподіл тиску в пласті з трьома свердловинами у різні моменти часу: 2 доби (а), 7 діб (б) з урахуванням лінійної залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску ($\alpha_\varepsilon=0.1$)

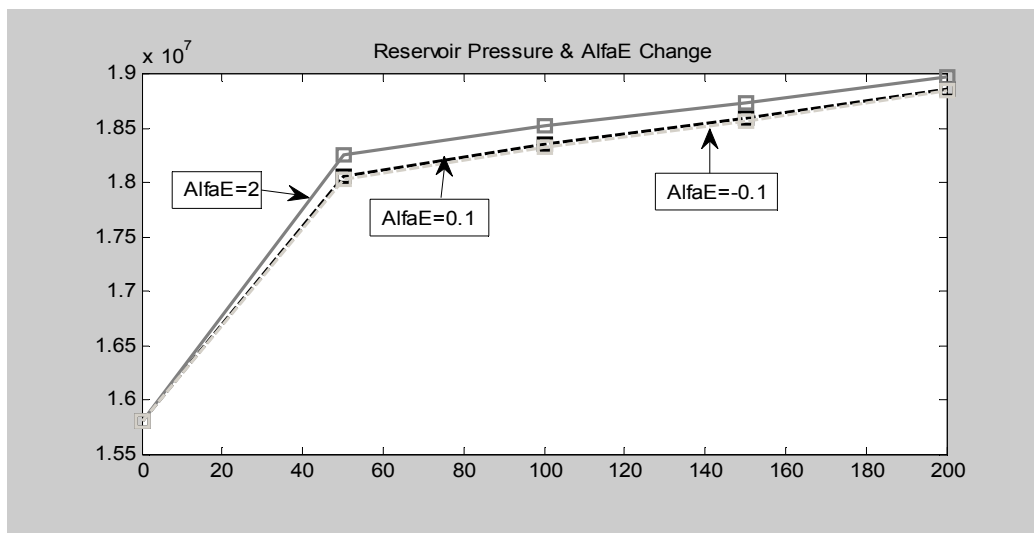


Рисунок 6 – Вплив коефіцієнта α_ε на тиск у внутрішніх точках пласта (вздовж лінії $x_2=0$) у момент часу 2 доби з урахуванням лінійної залежності коефіцієнта гідропровідності від тиску

4 Чарний І.А. Подземная гидрогазомеханика / Чарний І.А. – Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ин-т компьютерных исследований, 2006. – 436 с.

5 Журавчак Л. М. Метод приграничних елементів у прикладних задачах математичної фізики / Журавчак Л. М., Грицько Є. Г. – Львів: Карпатське відділення Ін-ту геофізики НАН України, 1996. – 220 с.

6 Журавчак Л. М. Розв'язування просторової нестационарної задачі теплопровідності для зонально-однорідного термочутливого тіла / Журавчак Л. М. // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – 45, № 1. – С. 137–142.

7 Журавчак Л. М. Розв'язування просторової задачі теплопровідності для зонально-однорідного термочутливого тіла довільної форми / Журавчак Л. М. // Доп. НАН України. – 2002. – №8. – С. 37–41.

8 Аккуратов Ю.Н. Метод граничных интегральных уравнений и решение нелинейных задач теплопроводности / Аккуратов Ю.Н., Михайлов В.Н. // Журн. вычислит. мат. и математической физики. – 1980. – Т. 20, № 3. – С. 656–663.

9 Bialecki R. Boundary value problems for nonlinear material and nonlinear boundary conditions / Bialecki R., Nowak A.J. // Applied Mathematical Modelling. – 1981. – № 5. – С. 417–421.

10 Бреббия К. Методы граничных элементов / Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. – М.: Мир, 1987. – 524 с.

11 Журавчак Л. М. Нестационарне теплове поле в неоднорідних матеріалах з нелінійною поведінкою їх компонент / Журавчак Л. М., Забродська Н. В. // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – № 1. – С. 33–41.

12 Грицько Б. Математичне моделювання розподілу температури в середовищі з нелінійною поведінкою матеріалу елементів / Грицько Б., Гудзь Р., Журавчак Л. // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. мат. та інформ., 2011. – Вип. 17. – С. 73-84.

13 Бойко В.С. Підземна гідрогазомеханіка / Бойко В.С., Бойко Р.В. – Львів: Априорі, 2007. – 452 с.

14 Журавчак Л.М. Математичне моделювання зміни тиску у пласті з урахуванням дебіту свердловини та гідронепроникності зовнішньої криволінійної межі / Журавчак Л.М., Струк А.Є. // Вісник НУ “Львівська політехніка”. – 2011. – № 710. – С. 143-150. – Сер. “Комп’ютерні науки та інформаційні технології”.

15 Журавчак Л.М. Розв’язування задач неусталеної фільтрації пружної рідини в недеформівному пористому пласті методом приграничних елементів / Журавчак Л.М., Струк А.Є. // Сейсмологічні та геофізичні дослідження в сейсмоактивних регіонах : наук. конф., 29-30 травня 2012 р.: матер. конф. – Львів: Сполом, 2012. – С. 45-49 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії

09.11.12

Рекомендована до друку професором

Б.І. Навроцьким