

## АНАЛІЗ ДИНАМІЧНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ВІДЦЕНТРОВОГО НАГНІТАЧА ГПА З ГАЗОТУРБІННИМ ПРИВОДОМ ЯК ОБ'ЄКТА КЕРУВАННЯ

<sup>1</sup>А.І. Лагойда, <sup>2</sup>Ю.Є. Бляут, <sup>1</sup>Є.М. Лесів, <sup>1</sup>Г.Н. Семенцов

<sup>1</sup>ІФНТУНГ, 76019, м.Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) 727167,  
e-mail: kafatp@ukr.net

<sup>2</sup>УМГ «Львівтрансгаз», 79053, м. Львів, вул. І. Рибчака, 3, тел. (0322) 636034,  
e-mail: blaut@ltg.lviv.ua

*Досліджено статистичні характеристики перепаду тиску на конфузорі і ступеня підвищення тиску газу відцентрового нагнітача, що дало змогу визначити функцію передачі відцентрового нагнітача ГПА з газотурбінним приводом. Визначено також амплітудно-фазову, перехідну і частотні характеристики, що дає змогу використати їх для синтезу системи автоматичного антипомпажного регулювання ВН ГПА з газотурбінним приводом.*

Ключові слова: відцентровий нагнітач, статистичні оцінки, спектральна густина, функція передачі.

*Исследованы статистические характеристики перепада давления на конфузоре и степени повышения давления газа центробежного нагнетателя, что позволило определить функцию передачи центробежного нагнетателя ГПА с газотурбинным приводом. Определена также амплитудно-фазовая, переходная и частотная характеристики, что позволит использовать их для синтеза системы автоматического антипомпажного регулирования ВН ГПА с газотурбинным приводом.*

Ключевые слова: центробежный нагнетатель, статистические оценки, спектральная плотность, функция передачи.

*Statistical characteristics of centrifugal supercharger's productivity and the degree of increase of gas pressure, which has allowed to determine the transfer function of a centrifugal supercharger gas pumping plant with turbine drive was investigated. The transfer amplitude-phase, transient and frequency characteristics determined, which has allowed to use them during the synthesis of automatic surging control system of a centrifugal supercharger gas pumping plant with turbine drive.*

Key words: centrifugal supercharger, statistical evaluation, spectral density, transfer function.

**Вступ.** Основними задачами експлуатації ГПА з газотурбінним приводом є забезпечення надійної безаварійної роботи відцентрових нагнітачів (ВН) із максимально високою економічністю і підтримання компримування газу точно за заданим графіком. Для успішного виконання даних задач необхідно під час експлуатації нагнітачів постійно підтримувати їхні динамічні властивості в заданих межах. Витрата природного газу через ВН є головним і досить важливим показником надійності і економічності роботи ГПА в цілому і визначається на компресорній станції за перепадом тиску на конфузорі всмоктуючого патрубка ВН. Ступінь підвищення тиску газу ВН також є дуже важливим показником його роботи. Чим він вищий, тим витрати на перекачування газу менші. Однак для ВН тиск має свої межі, зазначені в наведених характеристиках, перевищувати які не можна. Під час роботи ВН за малих об'ємних витрат (нижче 130 м<sup>3</sup>/хв) і значних підвищеннях тиску (вище 1,5) може настати явище помпажу.

Неконтрольована зміна хоча б одного показника роботи нагнітача із вище зазначених призводить до порушення газодинамічної характеристики ВН, небажаним результатом чого може стати вихід із ладу устаткування. Щоб запобігти цьому необхідно постійно детально досліджувати і аналізувати динамічні властивості ГПА.

Одним із основних методів здійснення такого дослідження є аналітичний. Він полягає у описі динамічних властивостей об'єкта за допомогою алгебраїчних і диференціальних рівнянь. Сукупність таких рівнянь складає математичну модель досліджуваного об'єкта [1].

**Постановка завдання.** Метою даної роботи є аналіз динамічних властивостей ВН ГПА з газотурбінним приводом як об'єкта керування. Це уможливить автоматичне регулювання і захист відцентрового нагнітача від помпажу, що сприяє підвищенню надійності роботи ГПА.

**Результати.** Оскільки зміна параметрів ВН ГПА має випадковий характер, при побудові моделі застосовували методи математичної статистики. Адже випадкові процеси, як відомо [2], зручно описувати за допомогою статистичних характеристик, таких як: математичне сподівання, дисперсія, автокореляційна функція та спектральна густина.

Розглянемо зв'язок між статистичними характеристиками двох стаціонарних сигналів - витратою  $Q(t)$  і ступенем підвищення тиску газу  $E(t)$ , які є відповідно вхідним і вихідним сигналами лінійної динамічної ланки з шуканою функцією передачі  $W(p)$ . Для зручності введемо позначення  $Q(t) = x(t)$ ,  $E(t) = y(t)$  і

скористаємось методикою дослідження, викладеною в [1,3,5].

Вихідний сигнал  $y(t)$  зв'язаний з вхідним сигналом  $x(t)$  інтегралом згортки:

$$y(t) = \int_0^{\infty} x(t - \tau_1)W(\tau_1)d\tau_1, \quad \tau_1 > 0, \quad (1)$$

де  $W(\tau_1)$  – імпульсна перехідна функція ланки;

$\tau_1$  – змінна інтегрування.

Знайдемо взаємну кореляційну функцію сигналів  $x(t)$  і  $y(t)$ . Для цього підставимо вираз (1) у загальну формулу для визначення взаємної кореляційної функції, вважаючи при цьому, що  $x_1(t) = x(t)$  і  $x_2(t) = y(t)$ .

Тоді отримаємо:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) \left[ \int_0^{\infty} x(t + \tau - \tau_1)W(\tau_1)d\tau_1 \right] dt. \quad (2)$$

При зміні порядку інтегрування в правій частині виразу (2) утвориться автокореляційна функція вхідного сигналу з аргументом, рівним різниці  $\tau - \tau_1$  і формула (2) набуде вигляду:

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} R_x(\tau - \tau_1)W(\tau_1)d\tau_1. \quad (3)$$

Інтеграл (3) має такий самий вигляд, як інтеграл згортки (1), тому функцію  $R_{xy}(\tau)$  можна розглядати як реакцію ланки на вплив, який має форму кореляційної функції  $R_x(\tau)$ .

З виразу (3) випливає також, що в частковому випадку, коли вхідний сигнал  $x(t)$  є білим шумом, його кореляційна функція рівна імпульсній перехідній функції ланки. Дійсно, підставивши в (3)  $R_{xy}(\tau) = \delta(\tau)$  і враховуючи "вихоплюючу" властивість дельта-функції, отримаємо:

$$R_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} \delta(\tau - \tau_1)W(\tau_1)d\tau_1 = \omega(\tau). \quad (4)$$

Якщо інтеграл згортки (1) підставити у вираз для автокореляційної функції вихідного сигналу  $y(t)$  і аналогічно змінити порядок інтегрування, тоді отримаємо:

$$R_y(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \omega(\tau_1)\omega(\tau - \tau_1)d\tau. \quad (5)$$

При підстановці у вираз (5) одержуємо формулу для обчислення дисперсії вихідного сигналу:

$$D_y = \int_0^{\infty} [\omega(\tau_1)]^2 d\tau_1 = \int_0^{\infty} [\omega(t)]^2 dt. \quad (6)$$

Таким чином, для визначення дисперсії вихідного сигналу при дії на вході ланки білого шуму необхідно проінтегрувати за часом квадрат імпульсної перехідної функції ланки.

Знайдемо тепер зв'язок між спектральними густинами сигналів  $x(t)$  і  $y(t)$ .

Застосуємо спочатку формулу взаємної спектральної густини, вважаючи  $x_1(t) = x(t)$ . Підставивши в неї вираз (3) для функції  $R_{xy}(\tau)$  і виконуючи деякі очевидні перетворення, отримаємо:

$$S_{xy}(j\omega) = \int_0^{\infty} W(\tau_1)e^{-j\omega\tau} d\tau_1 \int_0^{\infty} (\tau - \tau_1)e^{-j\omega(\tau - \tau_1)} d\tau. \quad (7)$$

Перший інтеграл є амплітудно-фазочастотною функцією  $W(j\omega)$ , а другий – спектральною густиною  $S_x(\omega)$  вхідного сигналу. Тому замість виразу (7) можна записати наступні співвідношення між спектральними густинами:

$$S_{xy}(j\omega) = \int_0^{\infty} W(j\omega)S_x(\omega), \quad (8)$$

або

$$S_{yx}(j\omega) = \int_0^{\infty} W(j\omega)S_x(\omega). \quad (9)$$

Вирази (8) і (9) використовуються для ідентифікації – визначення характеристик керованих об'єктів за експериментальними реалізаціями вхідного і вихідного сигналів. Для цього спочатку обчислюють кореляційні функції  $R_x(\tau)$  і  $R_{xy}(\omega)$ , а потім переходять до спектральних густин  $S_x(\omega)$  і  $S_{xy}(\omega)$  [3].

Застосовуючи формулу для спектральної густини  $S_y(\omega)$  вихідного сигналу, отримаємо:

$$S_{xy}(\omega) = \int_0^{\infty} W(\tau_1)e^{-j\omega\tau_1} d\tau_1 \int_0^{\infty} W(\tau_2)e^{-j\omega\tau_2} d\tau_2 \times \\ \times \int_0^{\infty} R_x(\tau + \tau_1 - \tau_2)e^{-j\omega(\tau + \tau_1 - \tau_2)} d\tau. \quad (10)$$

Замінюючи перший і другий інтеграли функціями  $W(j\omega)$  і  $W(-j\omega)$ , а третій - функцією  $S_x(\omega)$ , приходимо до одного з найважливіших в статистичній динаміці співвідношень між спектральними густинами вхідного і вихідного сигналів [1,3]:

$$S_y(j\omega) = W(j\omega)W(-j\omega)S_x(\omega), \quad (11)$$

або

$$S_y(\omega) = \{W(j\omega)\}^2 S_x(\omega). \quad (12)$$

Співвідношення (12) показує, що спектральна густина вихідного сигналу рівна спектральній густині вхідного сигналу, помноженій на квадрат амплітудно-фазочастотної функції ланки.

Фазова характеристика ланки не впливає на спектральну густина вихідного сигналу.

Відзначимо, що до формули (12) можна дійти з фізичних уявлень. Амплітудно-фазочастотна функція  $W(j\omega)$  при кожному значенні аргументу  $\omega$  визначає відношення амплітуд гармонік вхідного і вихідного сигналів, а спектральні густини  $S_x(\omega)$  і  $S_y(\omega)$  при фіксованому значенні  $\omega$  дорівнюють квадратам амплітуд гармонік.

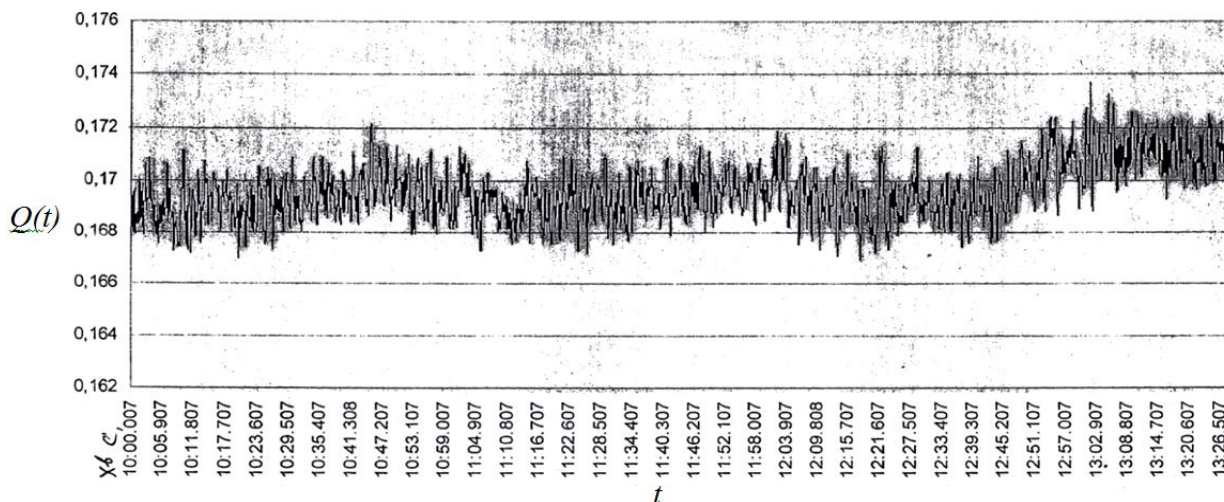


Рисунок 1 – Графік зміни продуктивності  $Q(t)$  відцентрового нагнітача

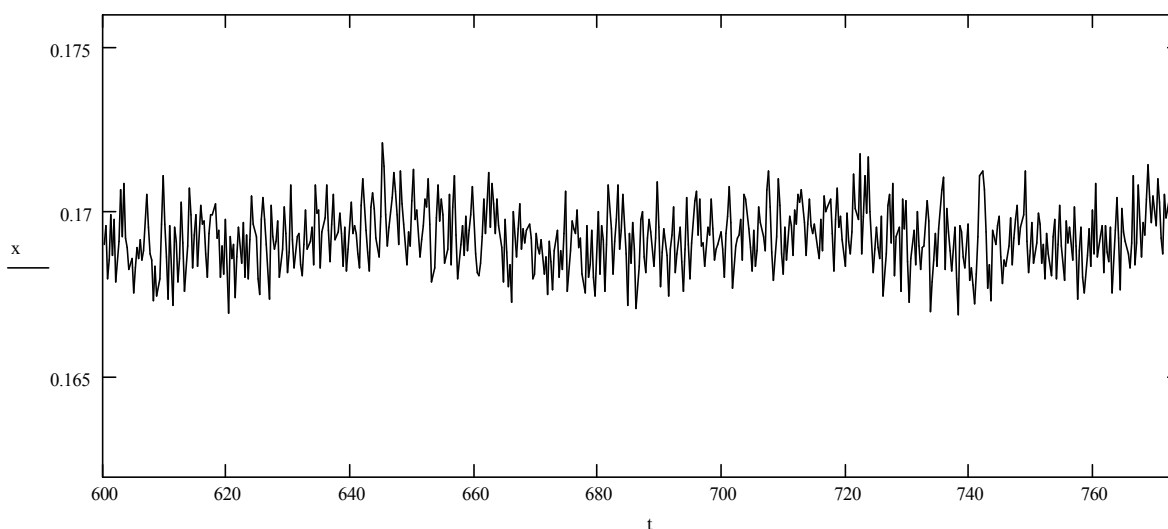


Рисунок 2 – Відтворений графік зміни продуктивності  $Q(t) = x(t)$  відцентрового нагнітача

Отже, для застосування вище вказаних формул при моделюванні помпажних характеристик ВН необхідно провести аналіз динамічних властивостей нагнітача на основі методів математичної статистики.

Вихідними даними для проведення аналізу статичних характеристик є графік зміни перепаду тиску на конфузори, зображений на рис. 1.

Для зручності цифрового оброблення даного графіку замінимо час, представлений в хвилинах, на час в секундах. Отже, початковий час дорівнюватиме  $10:00.007 \text{ хв} = 600,007 \text{ с}$ , відповідно, кінцевий час буде представлений як  $13:26.507 \text{ хв} = 806,507 \text{ с}$ . Для дослідження вибираємо ділянку, на якій процес є стаціонарним, а саме інтервал від  $10:00.007 \text{ хв} (600,007 \text{ с})$  до  $12:54.107 \text{ хв} (774,107 \text{ с})$ .

Наступним кроком є оцифрування графіку з метою отримання таблиці значень сигналу, який позначимо як  $x(t)$ . Для проведення оцифрування графіку використаємо комп'ютерну програму Graph2Digit.

Для того, щоб отримати необхідну і достатню кількість значень  $x$ , потрібно правильно визначити період дискретизації  $\Delta t$  для даного

графіку. В програмі Graph2Digit проводимо оцифрування графіку з періодом дискретизації  $0,3 \text{ с}$ . В результаті отримали значень  $x$  та  $t$ . Кількість значень становить 581. Отримані значення експортуємо в програмний продукт MathCad для подальшого визначення числових характеристик випадкових значень. Значення в програмному продукті MathCad матимуть наступний вигляд:

	0		0
0	0.169	0	600
1	0.1696	1	600.3
2	0.168	2	600.6
3	0.1685	3	600.9
4	0.1699	4	601.2
5	0.1687	5	601.5
6	0.1698	6	601.8
7	0.1679	7	602.1
8	0.1691	8	602.4
9	0.1707	9	602.7

З метою перевірки отриманих результатів в пакеті MathCad відтворимо неперервний графік залежності  $x(t)$ . Отриманий графік зображено на рис. 2.

Таблиця 1 – Значення абсолютних та відносних частот

Номер інтервалу	Границя інтервалу		Середина інтервалу, $x_i$	Абсолютна частота, $m_i$	Відносна частота, $\omega_i$
	нижня	верхня			
1	166,895	167,4391	167,167	15	0,0258
2	167,4391	167,9832	167,7112	37	0,0637
3	167,9832	168,5273	168,2553	82	0,1411
4	168,5273	169,0714	168,7994	118	0,2031
5	169,0714	169,6155	169,3435	135	0,2324
6	169,6155	170,1596	169,8876	88	0,1515
7	170,1596	170,7037	170,4317	62	0,1067
8	170,7037	171,2478	170,9758	33	0,0568
9	171,2478	171,7919	171,5199	8	0,0138
10	171,7919	172,336	172,064	3	0,0052

У зв'язку з дуже низькою величиною розмаху вибірки:  $R = x_{\max} - x_{\min}$ , змінюємо масштаб осі ОХ на 1000, тобто домножуємо всі значення на 1000.

Оцінку математичного сподівання визначимо за допомогою вбудованої функції MathCad:

$$m := \text{mean}(x) . \quad (13)$$

Отже,

$$m = 169.257$$

Для обчислення оцінки дисперсії скористаємось також вбудованою функцією MathCad:

$$D := \text{var}(x), \quad (14)$$

$$D = 0.928$$

Тоді середньоквадратичне відхилення дорівнює:

$$\sigma = \sqrt{D} , \quad (15)$$

$$\sigma = 0.963$$

Для оцінки характеру протікання випадкового процесу  $x(t)$  визначимо його закон розподілу. З цією метою поділимо вибірку значень  $x$  на інтервали та визначимо їх абсолютні та відносні частоти.

Спочатку впорядкуємо досліджувану вибірку у порядку зростання. Для цього застосуємо наступну функцію пакету MathCad:

$$Z := \text{sort}(x) \quad (16)$$

Тоді отримуємо наступні значення:

$$Z = \begin{array}{|c|c|} \hline & 0 \\ \hline 0 & 166.895 \\ \hline 1 & 166.946 \\ \hline 2 & 166.996 \\ \hline 3 & 167.068 \\ \hline 4 & 167.156 \\ \hline 5 & 167.185 \\ \hline 6 & 167.216 \\ \hline 7 & 167.254 \\ \hline 8 & 167.27 \\ \hline 9 & 167.302 \\ \hline \end{array}$$

Знаходимо розмах за формулою:

$$R := \max(x) - \min(x), \quad (17)$$

$$R = 5.441 .$$

Розділюємо її на 10 груп із інтервалами  $h = 0.5441$  та визначаємо границі інтервалів. Збережемо їх як масив  $\text{int}$ , а також середини інтервалів (масив  $x_i$ ).

$$i := 0..9,$$

$$\text{int}_0 := Z_0, \quad (18)$$

$$\text{int}_{i+1} := \text{int}_i + h, \quad (19)$$

де  $Z_0$  – найменше значення величини  $x$ ;

$\text{int}_0$  – нижня границя першого інтервалу;

$\text{int}_{i+1}$  – верхня границя  $i$ -го інтервалу.

Середини інтервалів розрахуємо так:

$$x_i := \frac{\text{int}_i + \text{int}_{i+1}}{2} . \quad (20)$$

Для обчислення абсолютних частот інтервалів (масив  $m_i$ ) використаємо вбудовану функцію MathCad:

$$m_i := \text{hist}(\text{int}, Z) . \quad (21)$$

Відносні частоти обчислимо за формулою:

$$\omega_i := \frac{m_i}{n} . \quad (22)$$

Значення усіх розрахунків заносимо в табл. 1.

Виконаємо перевірку обчислення абсолютних та відносних частот:

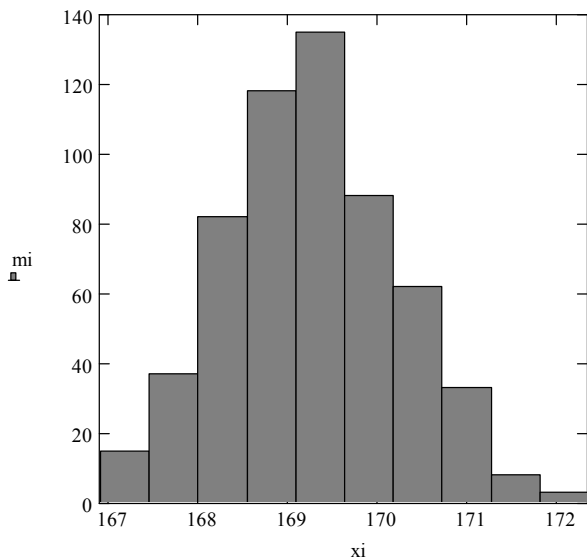
$$\sum_{i=0}^9 m_i = 581,$$

$$\sum_{i=0}^9 \omega_i = 1.$$

Користуючись отриманими даними, побудуємо гістограму густини абсолютних частот, яка зображена на рис. 3.

Аналіз отриманої гістограми дає підстави припустити, що даний розподіл підпорядковується нормальному закону.

Для перевірки даної гіпотези скористаємось критерієм Пірсона  $\chi^2$ . Для цього спочатку потрібно знайти теоретичні значення частот випадкового процесу  $x(t)$ , котрі обчислюються як добуток ймовірностей середин всіх інтервалів на число експериментів (в нашому випадку число випадкових значень вибірки).



**Рисунок 3 – Гістограма густини абсолютних частот сигналу  $Q(t) = x(t)$**

Обчислимо значення функції щільності:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (23)$$

Знаходимо ймовірність кожного інтервалу (при розрахунках вважаємо, що всі значення інтервалу зосереджені в його середині):

$$P = \frac{h}{\sigma} \cdot f(x) \quad (24)$$

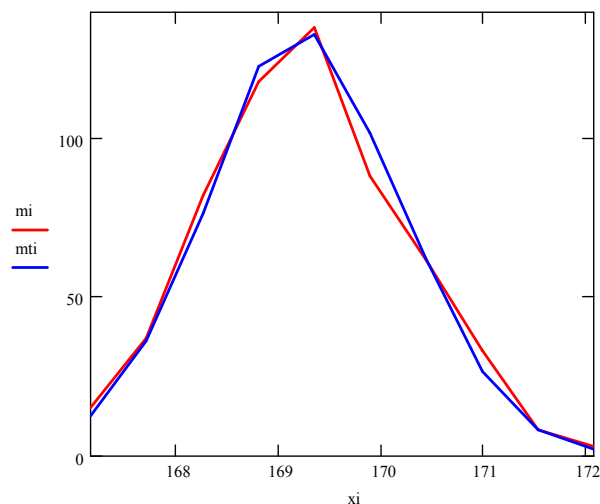
Перемножуючи ймовірності  $P$  на  $n$ , отримуємо теоретичні значення частот.

Критерій Пірсона  $\chi^2$  знаходиться за формулою:

$$\chi^2 = \frac{(|mi - mti|)^2}{mti} \quad (25)$$

де  $mi$  – абсолютні частоти випадкових значень;  
 $mti$  – теоретичні частоти.

Перед тим, як обчислювати критерій  $\chi^2$ , об'єднаємо частоти, значення яких менше 5. Всі отримані значення розрахунків заносимо в



**Рисунок 4 – Узгодження кривих абсолютних та теоретичних частот**

табл. 2. Графік узгодження кривих абсолютних та теоретичних частот зображений на рис. 4.

Після знаходження величини  $\chi^2$  визначимо число степенів свободи за формулою:

$$k = n - r - 1, \quad (26)$$

де  $n$  – число частот, що порівнюються (об'єднані частоти на кінцях приймаються за одну частоту);

$r$  – число параметрів теоретичної функції розподілу.

В нашому випадку  $n = 9$ ,  $r = 2$ . Оскільки нормальний закон розподілу двопараметричний, тому  $k = 9 - 2 - 1 = 6$ . Далі, користуючись таблицею ймовірностей для критерію Пірсона, знаходимо, що для  $k = 6$  і  $\chi^2 = 4,621$  найближчим буде значення  $P(\chi^2) = 0,6$  [4]. Отже, досліджуваний статистичний розподіл близький до нормального розподілу.

Для оцінки характеру протікання випадкового процесу в часі, встановимо зв'язок між значеннями випадкового процесу в різні моменти часу за допомогою двовірної функції розподілу – автокореляційної функції і функції спектральної густини.

**Таблиця 2 – Значення критерію Пірсона  $\chi^2$**

Номер інтервалу	Абсолютна частота, $mi$	Функція щільності, $f(x)$	Ймовірність інтервалу, $P$	Теоретична частота, $mti$	Критерій Пірсона, $\chi^2$
1	15	0,0379	0,0214	12,4276	0,5325
2	37	0,11	0,0621	36,0975	0,0226
3	82	0,2322	0,1312	76,2098	0,4399
4	118	0,3563	0,2113	122,7479	0,1836
5	135	0,3974	0,2285	132,7353	0,0386
6	88	0,3221	0,1749	101,6343	1,829
7	62	0,1897	0,1072	62,2716	0,0012
8	33	0,0812	0,0459	26,6621	1,5066
9	8	0,0253	0,0143	8,2967	0,0672
10	3	0,0057	0,0032	1,8766	
Сума	581	-	1	581	4,6212

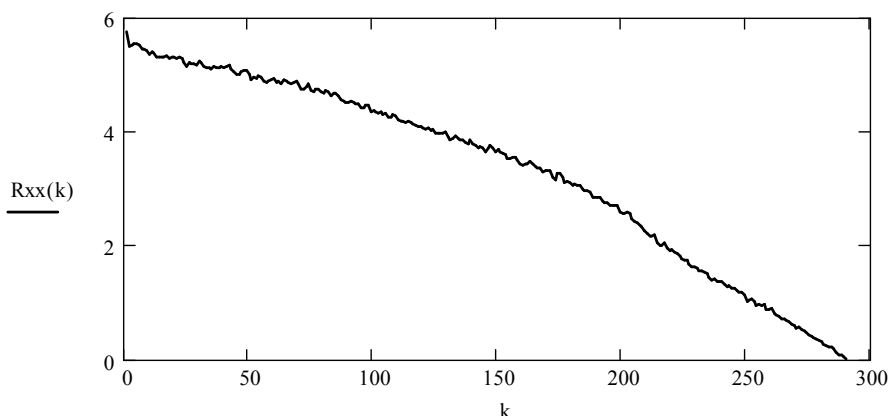


Рисунок 5 – Графік автокореляційної функції  $R_{xx}(k)$

Автокореляційною функцією є математичне сподівання похідних значень центрованої випадкової функції, взятих для двох моментів часу  $t_1$  та  $t_2$ , що визначається за формулою:

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x'(t-\tau)dt, \quad (27)$$

де  $\tau$  - кореляційний зсув (лаг) [5].

Оскільки досліджувана реалізація випадкової функції  $x(t)$  є сукупністю дискретних значень сигналу, отриманих через рівні проміжки  $\Delta t$ , то інтеграл (27) наближено замінимо сумою:

$$R_{xx}(\tau) = R(k\Delta t) \approx \frac{1}{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} x^0(i\Delta t)x^0(i\Delta t + k\Delta t), \quad (28)$$

де  $x^0(t) = x(t) - m$  - центровані значення.

	0
0	-0.2333
1	0.3507
2	-1.2843
3	-0.7293
4	0.6427
5	-0.5833

Для розрахунку автокореляційної функції  $R_{xx}(\tau)$  робимо всі центровані значення  $x$  додатними, тобто «піднімаємо» їх над віссю абсцис  $x0 := x0 - \min(x0)$ , задаємо час зсуву  $\tau = 0,6с$  та визначаємо автокореляційну функцію в MathCad з такою послідовністю:

$$\tau := 0.6 ;$$

$$\Delta t := t_2 - t_1 ;$$

$$\Delta t = 0.3 ;$$

$$\Delta k := \left( \frac{\tau}{\Delta t} \right) ;$$

$$\Delta k = 2 ;$$

$$i := 0..n ;$$

$$k := 1..n ;$$

$$k := 1.. \frac{n}{\Delta k} ;$$

$$R_{xx}(k) := \frac{1}{n-k} \cdot \sum_{i=0}^{n-1-\Delta k \cdot k} (x0_i \cdot x0_{i+k}) .$$

У результаті отримуємо графік автокореляційної функції  $R_{xx}(k)$  (рис. 5).

Графік отриманої автокореляційної функції підтверджує, що досліджуваний процес  $Q(t) = x(t)$  є стаціонарним і ергодичним.

Для статистичного аналізу стаціонарного випадкового процесу  $Q(t) = x(t)$  скористаємось спектральною густиною випадкової функції, тобто двостороннім зображенням автокореляційної функції за Фур'є:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} R(\tau) d\tau, \quad (29)$$

де  $R(\tau)$  – оригінал автокореляційної функції.

Оскільки спектральна густина є додатною функцією у всьому діапазоні частот від 0 до  $\infty$  і не містить відомостей про фази окремих гармонічних складових, визначимо спектральну гуштину за заданою аналітично автокореляційною функцією  $R_{xx}(\tau)$ , користуючись пакетом MathCad. Оскільки попередньо визначили автокореляційну функцію  $R_{xx}(\tau)$ , то наступним кроком збережемо отримані значення функції в масив даних:

$$rr1_{k-1} := R_{xx}(k) .$$

Далі використаємо перетворення Фур'є, взявши за основу вбудовану функцію  $fft(x)$ :

$$z1 := fft(rr1) .$$

Отримане перетворення потрібно взяти за модулем, оскільки спектральна густина є додатною у всьому діапазоні частот. Отже:

$$Sx_i := |z1_i| ;$$

$$i := 0..length(z1)-1 ;$$

$$\omega_i := i .$$

На основі отриманих даних побудуємо залежність  $S$  від  $\omega$  і отримаємо графік спектральної густини  $S(\omega)$  (рис. 6).

Вихідними даними для проведення аналізу вихідного сигналу є графік зміни ступеня підвищення тиску газу  $E(t)$ , зображений на рис. 7.

Всі операції, що проводились із вхідним сигналом  $Q(t)$ , застосуємо і до даного вихідного сигналу  $E(t)$ . Отже, початковий час дорів-

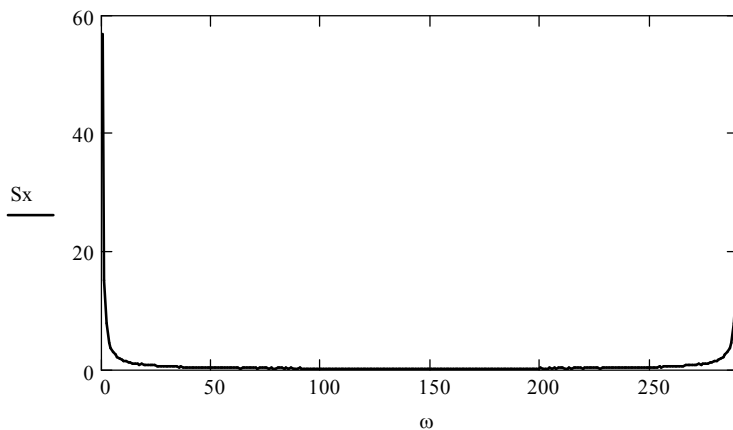


Рисунок 6 – Графік спектральної густини досліджуваного процесу  $Q(t) = x(t)$

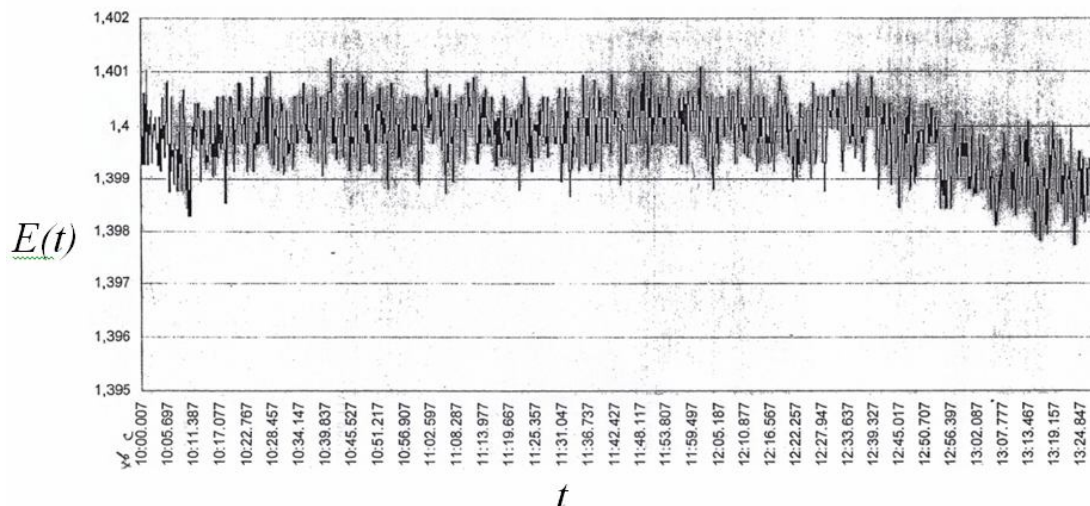


Рисунок 7 – Графік зміни ступеня підвищення тиску газу  $E(t)$

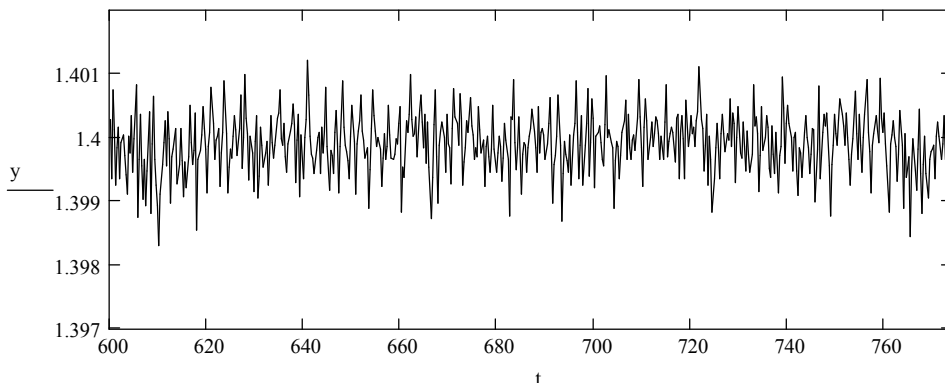


Рисунок 8 – Відтворений графік функції  $E(t) = y(t)$

новатиме 10:00.007 хв = 600,007 с, відповідно кінцевий час - 13:24.847 хв = 804,847 с. Для дослідження вибираємо ділянку, на якій процес є стаціонарним, а саме інтервал від 10:00.007 хв (600,007 с) до 12:54.107 хв (774,107 с).

Оцифрування графіка  $E(t)$  здійснюємо з періодом дискретизації 0,3 с. В результаті отримуємо 581 значення  $y$  та  $t$ , які наведені нище:

	0		0
0	1.4003	0	600
1	1.3994	1	600.3
2	1.4007	2	600.6
3	1.4001	3	600.9
4	1.3992	4	601.2
5	1.3998	5	601.5
6	1.4002	6	601.8
7	1.3994	7	602.1
8	1.3999	8	602.4
9	1.4	9	602.7

Користуючись отриманими даними, відтворюємо неперервний графік залежності  $E(t) = y(t)$  в пакеті MathCad (рис. 8).

Таблиця 3 – Значення абсолютних та відносних частот

Номер інтервалу	Границя інтервалу		Середина інтервалу, $x_i$	Абсолютна частота, $m_i$	Відносна частота, $\omega_i$
	нижня	верхня			
1	1398,308	1398,5971	1398,4525	3	0,0052
2	1398,5971	1398,8862	1398,7416	11	0,0189
3	1398,8862	1399,1753	1399,0307	27	0,0465
4	1399,1753	1399,4644	1399,3198	61	0,105
5	1399,4644	1399,7535	1399,6089	104	0,179
6	1399,7535	1400,0426	1399,898	155	0,2668
7	1400,0426	1400,3317	1400,1871	129	0,222
8	1400,3317	1400,6208	1400,4762	58	0,0998
9	1400,6208	1400,9099	1400,7653	26	0,0448
10	1400,9099	1401,199	1401,0544	7	0,012

У зв'язку з дуже низькою величиною розмаху вибірки:  $R = y_{\max} - y_{\min}$ , змінюємо масштаб осі ОУ на 1000, тобто домножуємо всі значення на 1000.

Використовуючи формули (13-15), обчислюємо для випадкової функції  $y(t)$  наступні величини:

- оцінку математичного сподівання:

$$m = 1399.895.$$

- оцінка дисперсії:

$$D = 0.211.$$

- середньоквадратичне відхилення:

$$\sigma = 0.459.$$

Далі визначимо закон розподілу функції  $y(t)$ . Для цього ділимо вибірку  $y$  на інтервали. Застосовуючи формулу (16), отримуємо значення в порядку зростання:

	0
0	1398.308
1	1398.448
2	1398.541
3	1398.68
4	1398.726
5	1398.75
6	1398.761
7	1398.761
8	1398.796
9	1398.796

Зона розсіювання значень (розмах) становить:

$$R = 2.891.$$

Розділюємо її на 10 груп із інтервалами  $h = 0.2891$ . Потім за формулами (17-22) обчислюємо границі інтервалів, середини інтервалів, абсолютні і відносні частоти. Результати заносимо до таблиці 3.

Виконуємо перевірку обчислення абсолютних та відносних частот:

$$\sum_{i=0}^9 m_i = 581,$$

$$\sum_{i=0}^9 \omega_i = 1.$$

Користуючись отриманими даними будемо гістограму густини абсолютних частот (рис. 9).

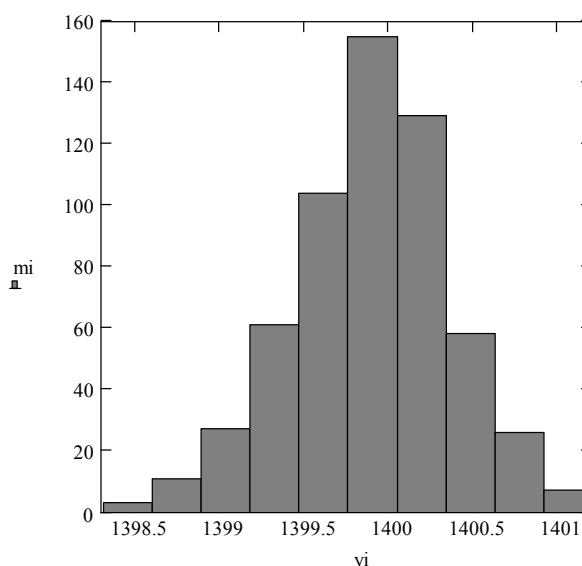


Рисунок 9 – Гістограма густини абсолютних частот

Як і у випадку із сигналом продуктивності нагнітача  $Q(t)$ , отримана гістограма дає змогу припустити, що даний розподіл також підпорядковується нормальному закону. Перевірку здійснюємо аналогічно за критерієм Пірсона  $\chi^2$ . Використовуючи формули (23-25), для кожного інтервалу знаходимо функції щільності, його ймовірність, теоретичну частоту і критерій  $\chi^2$ . Всі отримані значення розрахунків заносимо до таблиці 4. Графік узгодження кривих абсолютних та теоретичних частот зображений на рисунку 10.

Користуючись таблицею ймовірностей для критерію Пірсона, знаходимо, що для  $k = 6$  і  $\chi^2 = 5,0167$  найближчим буде значення  $P(\chi^2) = 0,51$  [4]. Отже, даний статистичний розподіл близький до нормального розподілу.

Розрахуємо автокореляційну функцію вхідного сигналу  $y(t)$  за допомогою формули



Таблиця 4 – Значення критерію Пірсона  $\chi^2$

Номер інтервалу	Абсолютна частота, $m_i$	Функція щільності, $f(x)$	Ймовірність інтервалу, $P$	Теоретична частота, $mt_i$	Критерій Пірсона, $\chi^2$
1	3	0,0062	0,0039	2,2659	0,3512
2	11	0,0169	0,0039	9,6853	
3	27	0,0677	0,0167	24,7622	0,2022
4	61	0,1818	0,0426	66,5187	0,4579
5	104	0,3284	0,2018	117,269	1,5014
6	155	0,3989	0,2513	145,9995	0,5549
7	129	0,3259	0,2053	119,2851	0,7912
8	58	0,1791	0,1128	65,5368	0,8667
9	26	0,0662	0,0417	24,2161	0,1314
10	7	0,0164	0,0104	6,0192	0,1598
Сума	581	-	1	581	5,0167

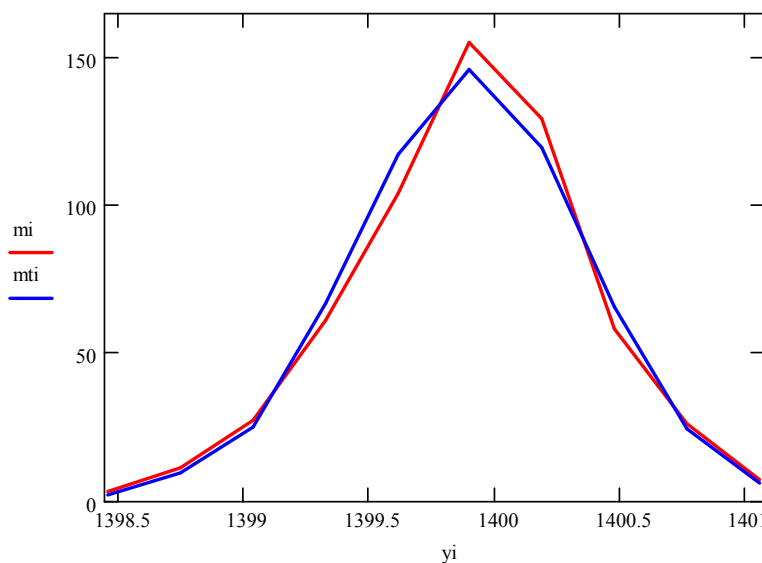


Рисунок 10 – Узгодження кривих абсолютних та теоретичних частот

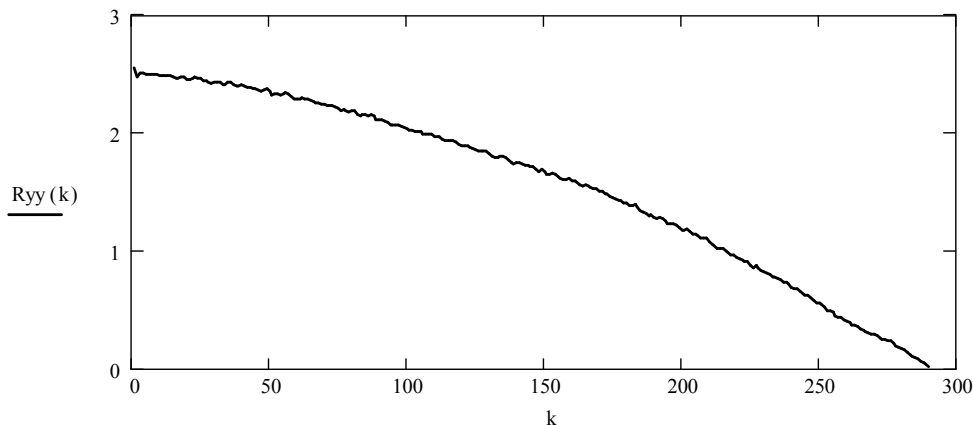


Рисунок 11 – Графік автокореляційної функції  $R_{yy}(k)$

(29), а також алгоритму, описаного в попередньому розділі, для розв'язку в Mathcad. Графік обчисленої автокореляційної функції зображений на рис. 11.

Графік отриманої автокореляційної функції підтверджує, що досліджуваний процес  $E(t) = y(t)$  є також стаціонарним і ергодичним.

Залишилось визначити спектральну густину даної випадкової функції. Користуючись продуктом Mathcad, виконуємо пряме перетворення Фур'є автокореляційної функції. В результаті отримуємо бажану спектральну густину вихідного сигналу, графік якої зображений на рис. 12.

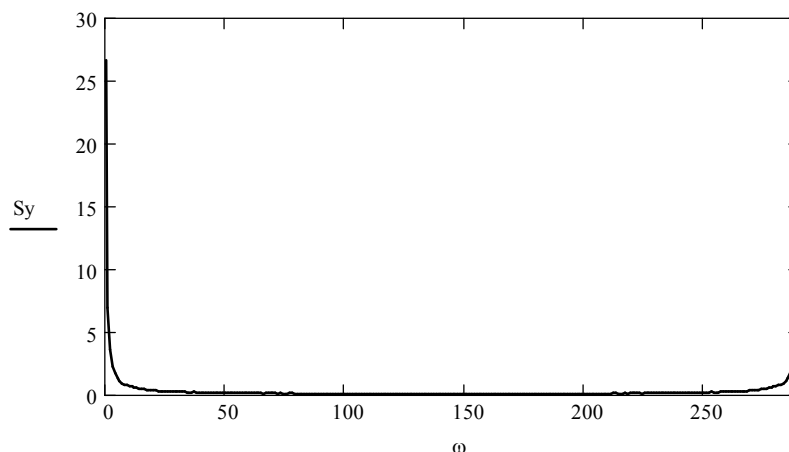


Рисунок 12 – Графік спектральної густини досліджуваного процесу

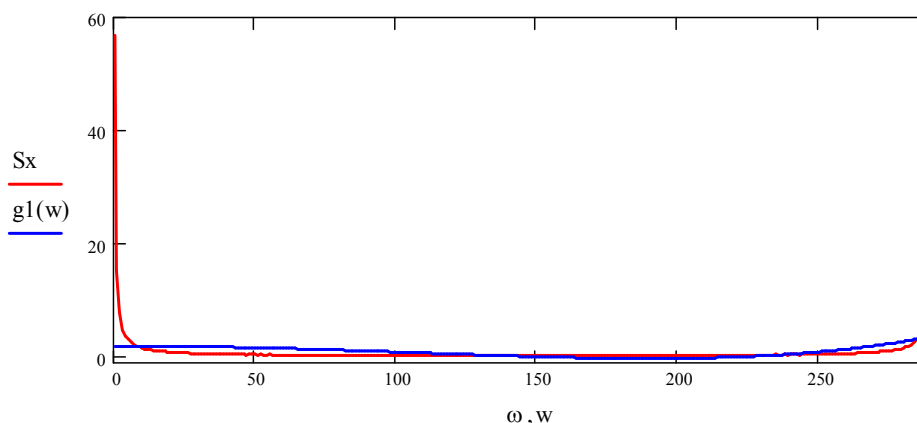


Рисунок 13 – Графік спектральної густини сигналу  $Q(t)$  і її апроксимованої функції

Як бачимо, для застосування формули (12) потрібно мати рівняння, які би описували функцію спектральних густин вхідного і вихідного сигналів:

$$\{W(j\omega)\}^2 = \frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)}. \quad (30)$$

Для цього розраховані спектральних густин (рис. 6 і 13) опишемо за допомогою програмного продукту Mathcad і вбудованої функції узагальненої регресії *linfit* [6]. Дану функцію застосовують у тих випадках, коли звичайна поліноміальна функція не придатна для опису залежності певних даних, і тому для апроксимації даних необхідно використовувати лінійну комбінацію довільних функцій, жодна з яких може навіть не бути поліномом:

$$y = a_0 \cdot f_0(x) + a_1 \cdot f_1(x) + \dots + a_n \cdot f_n(x),$$

де  $a_0$  – невідомі коефіцієнти, розраховані за допомогою функції *linfit*;

$f_n(x)$  – довільна функція лінійної комбінації.

Отже, результатом роботи функції *linfit* буде вектор із коефіцієнтів, потрібних для створення лінійної комбінації апроксимуючої функції.

Задаємо відповідні значення для кожної змінної функції *linfit* і визначаємо рівняння спектральної густини  $S_x(\omega)$  відповідного сигналу в такій послідовності:

$$\begin{aligned} vx &:= \omega ; \\ vy &:= S_x ; \end{aligned}$$

$$F1(x) := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^2 \\ x^4 \end{pmatrix} ;$$

$$\begin{aligned} K1 &:= \text{linfit}(vx, vy, F1) ; \\ g1(w) &:= K1 \cdot F1(w) ; \end{aligned}$$

$$K1 = \begin{pmatrix} 1.8429 \\ -1.2168 \cdot 10^{-4} \\ 1.6801 \cdot 10^{-9} \end{pmatrix}.$$

В результаті отримуємо рівняння функції спектральної густини вхідного сигналу:

$$S_x(\omega) = 1,843 - 1,217 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^2 + 1,68 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^4. \quad (31)$$

Графік спектральної густини  $S_x(\omega)$  і її апроксимованої функції ( $g1(w)$ ) зображено на рис. 13.

Аналогічні операції проведемо із функцією  $S_y(\omega)$ :

$$\begin{aligned} vx &:= \omega ; \\ vy &:= S_y ; \end{aligned}$$

$$F2(x) := \begin{pmatrix} x^0 \\ x^2 \end{pmatrix} ;$$

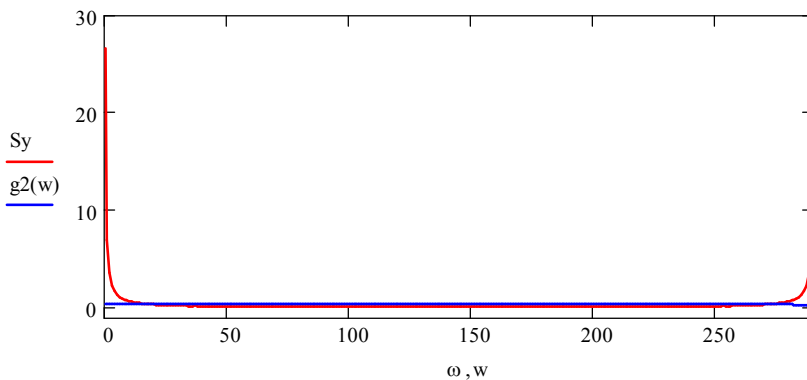


Рисунок 14 – Графік спектральної густини сигналу  $E(t)$  і її апроксимованої функції

```
K2 := linfit(vx,vy,F2) ;
g2(w) := K2 · F2(w) ;
K2 = ( 0.3828
      -5.8701·10-7 ) .
```

Рівняння спектральної густини вихідного сигналу буде таким:

$$S_y(\omega) = 0,383 - 5,87 \cdot 10^{-7} \cdot \omega^2. \quad (32)$$

Графік спектральної густини  $S_y(\omega)$  і її апроксимованої функції ( $g2(w)$ ) зображено на рис. 14.

У результаті даних розрахунків отримуємо вираз:

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{0,383 - 5,87 \cdot 10^{-7} \cdot \omega^2}{1,843 - 1,217 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^2 + 1,68 \cdot 10^{-9} \cdot \omega^4}. \quad (33)$$

Щоб отримати із виразу (33) функції передачі, скористаємось програмним продуктом Matlab і функцією *fact*:  $[W, W\_]=fact(S)$ , яка виконує факторизацію дробово-раціонального виразу [7]. Тут  $S$  – права частина виразу (33),  $W, W\_$  - функція передачі і комплексно спряжена до неї функція.

Виконання роботи даної функції зображене нижче.

```
>> S=tf([-5.87e-7 0 0.383],
        [1.68e-9 0 -1.217e-4 0 1.843])
>>
Transfer function:
    -5.87e-007 s^2 + 0.383
-----
 1.68e-009 s^4 - 0.0001217 s^2 + 1.843
>> [W,W_]=fact(S)
Transfer function:
    0.0007662 s + 0.6189
-----
 4.099e-005 s^2 + 0.01526 s + 1.358
Transfer function:
    0.0007662 s - 0.6189
-----
 4.099e-005 s^2 - 0.01526 s + 1.358
Код програми для функції fact в Matlab:
function[W,W_]=fact(S)
```

```
[c,d]=tfdata(S,'v');
nul=roots(c);
pol=roots(d);
m=1;
for i=1:length(nul) if real(nul(i))<0
p(m)=nul(i); m=m+1; end
end
m=1;
for i=1:length(nul) if real(nul(i))>0
p_(m)=nul(i); m=m+1; end
end
m=1;
for i=1:length(pol) if real(pol(i))<0
pp(m)=pol(i); m=m+1; end
end
m=1;
for i=1:length(pol) if real(pol(i))>0
pp_(m)=pol(i); m=m+1; end
end
b=poly(p); b_=poly(p_);
a=poly(pp); a_=poly(pp_);
a=sqrt(abs(d(1)))*a; a_=sqrt(abs(d(1)))*a_;
b=sqrt(abs(c(length(pol)-length(nul)+1)))*b;
b_=sqrt(abs(c(length(pol)-length(nul)+1)))*b_;
W=tf(b,a); W_=tf(b_,a_);
```

Отже, отримуємо наступну функцію передачі ВН ГПА:

$$W(p) = \frac{7,688 \cdot 10^{-4} \cdot p + 0,619}{4,099 \cdot 10^{-5} \cdot p^2 + 1,526 \cdot 10^{-2} \cdot p + 1,358}. \quad (34)$$

Також, роблячи заміну  $p = \frac{d}{dt}$  і вважаючи, що чисельник і знаменник функції передачі - це відповідно функції  $Y(p)$  і  $X(p)$ , можемо визначити диференціальне рівняння відцентрового нагнітача:

$$7,688 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{dY(t)}{dt} + 0,619 = \quad (35)$$

$$= 4,099 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{d^2 X(t)}{dt^2} + 1,526 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{dX(t)}{dt} + 1,358.$$

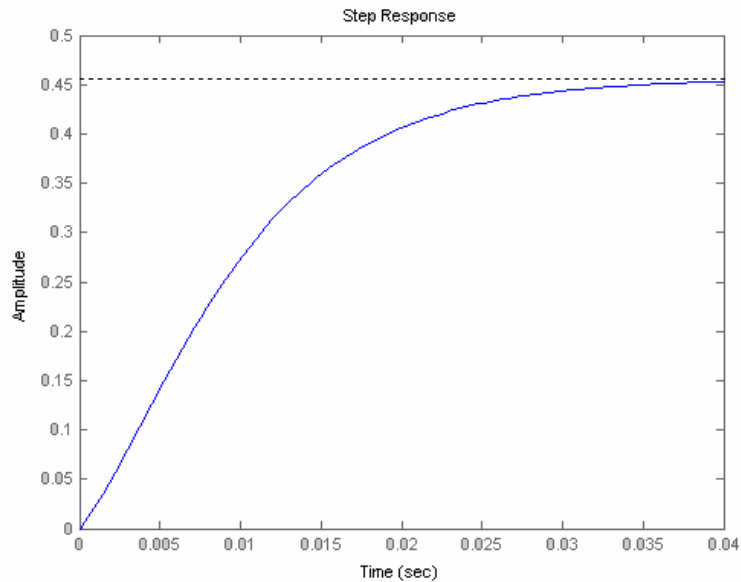


Рисунок 15 – Перехідна функція відцентрового нагнітача ГПА як об'єкта керування

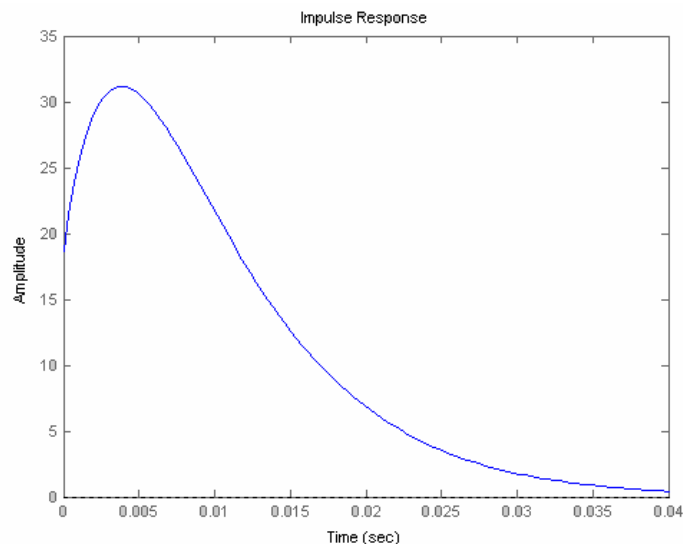


Рисунок 16 – Імпульсна перехідна функція відцентрового нагнітача ГПА як об'єкта керування

Проаналізуємо отриману модель ВН у вигляді функції передачі (34), визначивши її основні характеристики: перехідну, імпульсну перехідну функцію, амплітудно-частотну характеристику (АЧХ), фазо-частотну (ФЧХ), а також амплітудно-фазову характеристику (АФХ). Для цього скористаємось програмним продуктом Matlab.

Сформуємо функцію передачі моделі, використовуючи функцію *tf*:

```
>> num=[7.662e-4 0.619];
dem=[4.099e-5 0.01526 1.358];
W=tf(num,dem)
Transfer function:
    0.0007662 s + 0.619
-----
4.099e-005 s^2 + 0.01526 s + 1.358
```

За допомогою вбудованих функцій *step(W)* та *impz(W)* знаходимо відповідно перехідну (рис. 15) і імпульсну перехідну (рис. 16) функції.

На основі даних характеристик можна зробити висновки, що даний об'єкт є стійким, час перехідного процесу становить 0,04 с, перерегулювання відсутнє.

Застосовуючи функції *fregs* та *nyquist*, побудуємо відповідно АЧХ, ФЧХ та АФХ відцентрового нагнітача (рис. 17-19).

Тепер, маючи АФХ та користуючись критерієм Найквіста-Михайлова, можна оцінити стійкість об'єкта. Згідно із даним критерієм, якщо розімкнена система стійка або знаходиться на межі стійкості, то для того, щоб замкнена система була стійкою, необхідно і достатньо, щоб АФХ розімкненої системи при зміні  $\omega$  від 0 до  $\infty$  не охоплювала точку з координатами  $\{-1, j_0\}$ . Як бачимо із рис. 19, побудована АФХ

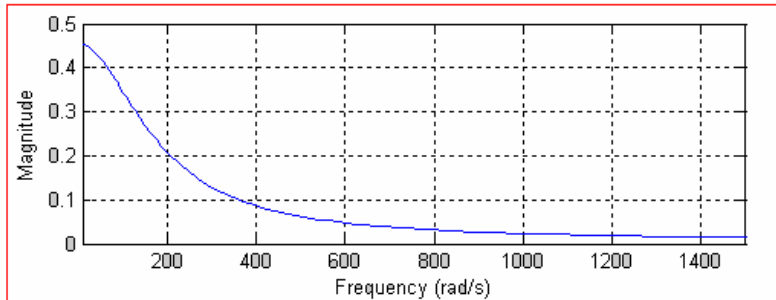
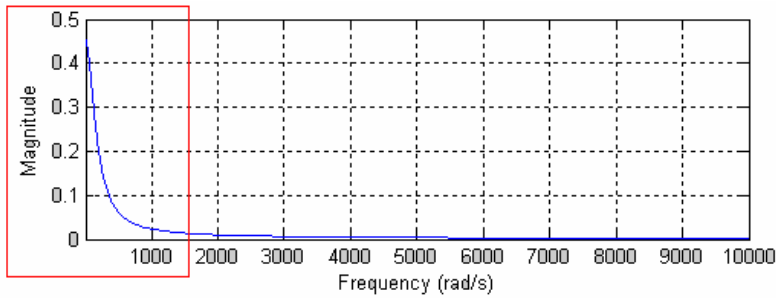


Рисунок 17 - Амплітудно-частотна характеристика ВН

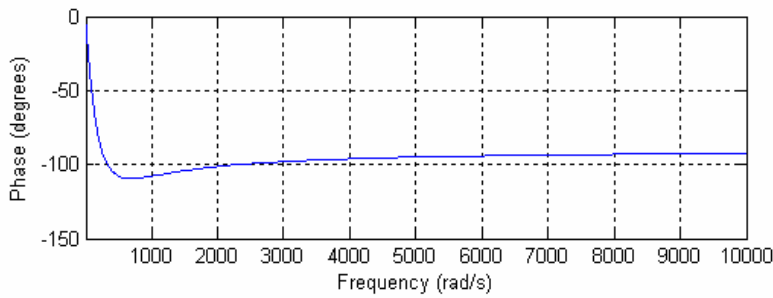


Рисунок 18 - Фазо-частотна характеристика ВН

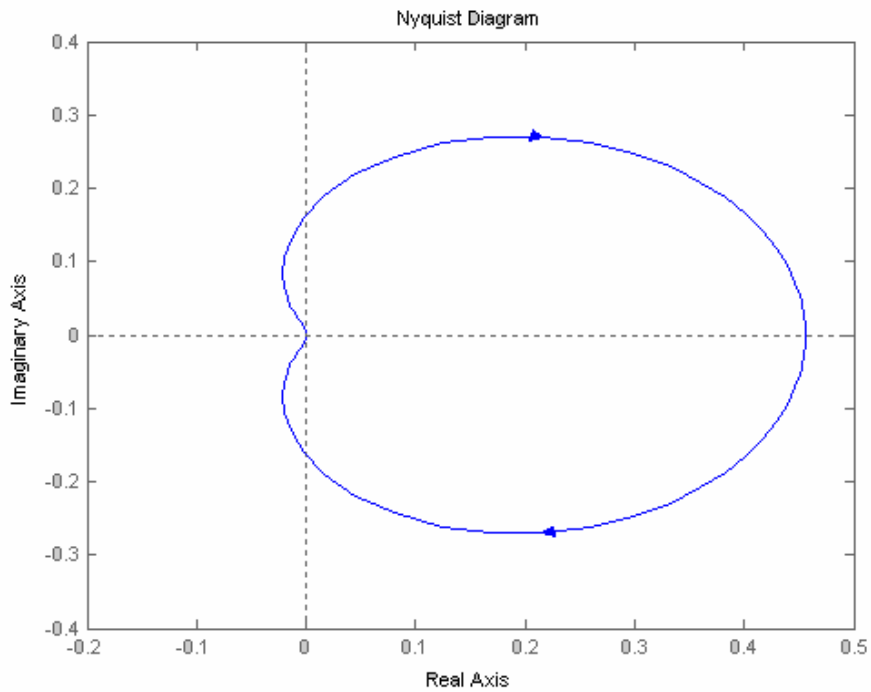


Рисунок 19 - Амплітудно-фазова характеристика ВН

не охоплює дану точку, а, отже, об'єкт керування є стійким.

**Висновки.** Аналіз динамічних властивостей ВН ГПА проводився на основі методів математичної статистики. Було вибрано і обґрунтовано метод дослідження ВН, який базується на застосуванні теорії про зв'язок між спектральними густинами сигналів об'єкта. Перший сигнал є параметром зміни продуктивності  $Q(t)$  нагнітача, а інший - параметром продуктивності зміни ступеня підвищення тиску газу  $E(t)$ . В ході паралельного аналізу обох сигналів було визначено статистичні характеристики нагнітача - математичне сподівання, дисперсія та середньоквадратичне відхилення, визначено закони розподілу та автокореляційні функції. Це, в свою чергу, уможливило розрахунок спектральних густин сигналів. Після цього було проведено опис даних спектральних густин відповідними рівняннями поліноміальної регресії та інші необхідні операції, в результаті чого отримали модель об'єкта у вигляді функції передачі, що і було кінцевим завданням проведення даного аналізу. Результати роботи дають підставу для таких висновків:

1. Теоретично обґрунтовано метод дослідження динамічних властивостей ВН ГПА, що базується на взаємозв'язках статистичних характеристик параметрів нагнітача.

2. Проведено аналіз сигналів ВН ГПА (параметр зміни продуктивності  $Q(t)$  і ступеня підвищення тиску газу  $E(t)$ ), визначено їхні статистичні характеристики, зокрема функцію спектральної густини.

3. Отримано рівняння функцій спектральних густин сигналів  $Q(t)$  і  $E(t)$ , що дало змогу визначити функцію передачі ВН, а також отримати його основні характеристики.

## Література

1 Семенцов Г. Н. Теорія автоматичного керування / Г. Н. Семенцов. – Івано-Франківськ, 1999. – 610 с.

2 Бендат Дж. Применения корреляционного и спектрального анализа; пер. с англ. / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1983. – 312 с.

3 Попович М. Г. Теорія автоматичного керування: підручник / М. Г. Попович, О. В. Ковальчук. – К.: Либідь, 1997. – 544 с.

4 Методика статистической обработки эмпирических данных. Руководящие технические материалы РТМ 44-62. – М.: Стандартгиз, 1966. – 100 с.

5 Назаренко М. В. Теоретичні засади та принципи побудови моделей динамічних процесів та їх регуляторів / М. В. Назаренко. – Кривий Ріг: Діоніс (ФОП Чернявський Д.О.), 2010. – 204 с.

6 Дьяконов В. П. Mathcad 11, 12, 13 в математике: справочник / В. П. Дьяконов. – М.: Горячая линия - Телеком, 2007. – 958 с.

7 Волков В. Л. Разработка алгоритмов оценивания процессов на основе Matlab / АПИ НГТУ; сост.: В. Л. Волков. – Арзамас: ООО «Ассоциация ученых», 2009. – 58 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії  
12.09.12*

*Рекомендована до друку професором  
М. І. Горбійчуком*