

Аналізуючи результати, наведені в табл.4 - 7 та факторні ваги можна зробити такі висновки:

- при проведенні двофакторного експерименту змінювалась витрата рідкої фази, витрата газової фази і відповідно співвідношення між цими витратами. Результати факторного аналізу інтенсивності сигналу показують, що 99,5 % всієї дисперсії досліджуваних сигналів покривають три фактори. Причому на перший фактор припадає 94,6 %, на другий 3,3 % і на третій 1,7 % дисперсії досліджуваного сигналу;

- з табл.6 і 7 видно, що протягом руху з низькочастотного діапазону енергетичного спектра у високочастотний при двофакторному аналізі вплив першого фактора збільшується, а другого зменшується. При трифакторному аналізі, вплив першого фактора максимальний в високочастотній області (смуги в6, в7), другого фактора в середньому діапазоні (в2, в3), а третього фактора в низькочастотному діапазоні (смуга в1).

Аналізуючи характер змін власного спектру віброакустичного сигналу при постійній витраті однієї з фаз і зміні витрати другої фази, а також вище наведені твердження, можна зробити висновок, що максимальна кореляція між витратою рідкої фази потоку та інтенсивністю віброакустичного сигналу відмічається в низькочастот-

ному діапазоні: 8...104 Гц. У діапазонах 104...504 Гц та 504...1000 Гц, інтенсивність сигналу порівняно невисока і тут існує найбільша кореляція між загальною витратою суміші та інтенсивністю сигналу. У високочастотному діапазоні 3000...6400 Гц існує найбільша кореляція між витратою газової фази потоку та інтенсивністю віброакустичного сигналу.

Результати факторного аналізу та аналізу головних компонент показують значну чутливість методу для вимірювання сумарної витрати та витрати газової фази двофазового потоку при високих газових факторах.

1. Райтер П.М. Розробка та дослідження віброакустичного методу та системи контролю фазового складу газоконденсатного потоку // Автореф. дис. ... канд. техн. наук. Івано-Франківськ, 1995.
2. Разработка бесконтактных методов и средств измерения дебита газоконденсатных скважин. Отчет по НИР / Тема N 329-896: N гос. рег. 01900002986, МИНГ им. И.М.Губкина, М., 1990, 104с. (Научн. руков. Браго Е.И.).
3. Райтер П.М. Віброакустичний метод контролю фазового складу газоконденсатного потоку // Вимірювальна техніка та метрологія. 1995. N51. С.85.
4. Richard A. Johnson, Dean W. Wichern. Applied Multivariate Statistical Analysis. New Jersey, 1988.

УДК 5393

РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ ГАРМОНІЙНИХ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ, РОЗПОВСЮДЖЕНИХ У БАГАТОШАРОВИХ СТРУКТУРАХ

© 1997, М.А.Конonenко, О.М.Карпаш, Ю.К.Рубцов

У цій статті розглянутий метод, який дає змогу обчислювати проходження пружних хвиль крізь шаровидні, з достатньо великою кількістю шарів, структури за допомогою матричного аналізу. Однак, збільшити кількість шарів у багатошаровій структурі вдасться за рахунок спрощення в геометрії: метод застосовують тільки для пружних хвиль і плоских багатошарових плит.

Проходженню звуку крізь багатошарові структури приділяють значну увагу в акустиці [1,2]. Одержані результати дають можливість оцінювати такі важливі характеристики шарових структур, як коефіцієнти проходження та відбиття звуку.

Розглянемо проходження плоских звукових хвиль крізь окремий плоский пружний шар, який знаходиться у воді. Схема проходження звуку матиме вигляд, зображений на рис.1. Кут θ_1 відповідає поздовжній хвилі, кут θ_t - поперечній, при цьому

$$\frac{\sin \theta_1}{C_1} = \frac{\sin \theta_t}{C_t} = \frac{\sin \theta}{C}, \quad (1)$$

де C_1 , C_t і C - відповідно швидкості поздовжньої і поперечної пружних хвиль і звукової хвилі.

Звукові тиски в воді запишемо у вигляді (А, В - коефіцієнти відповідно відбиття й проходження)

$$\begin{aligned} P_0 &= e^{ik_1(x \sin \theta + z \cos \theta)}, \\ P_{\text{відб}} &= A e^{ik_1(x \sin \theta - z \cos \theta)}, \\ P_{\text{пр}} &= B e^{ik_1(x \sin \theta + z \cos \theta)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Коливальну швидкість у шарі можна представити, як

$$\vec{V} = \vec{V}\Phi + \vec{V}\Pi, \quad (3)$$

де Φ і Π - скалярний і векторний потенціали швидкостей відповідно, які можна одержати зі звичайних потенціалів переміщень диференціюванням за часом. Оскільки в даній плоскій задачі можна прийняти $\Pi_x = \Pi_z = 0$; $\Pi_y = \Pi$, складові коливальної швидкості в шарі визначаються виразами

$$V_x = \frac{d\Phi}{dx} - \frac{d\Pi}{dz}$$

$$V_z = \frac{d\Phi}{dz} + \frac{d\Pi}{dx}. \quad (4)$$

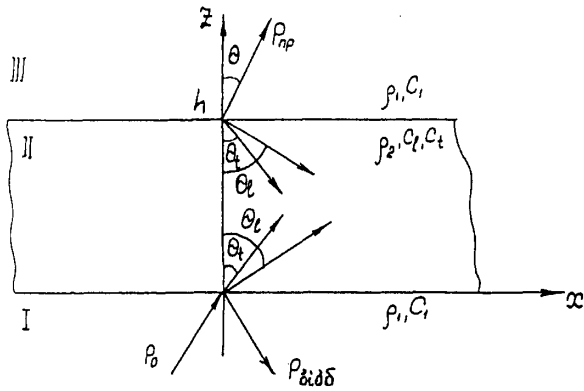


Рис. 1. Схема проходження звуку.

Рішення відповідних хвильових рівнянь для потенціалів Φ і Π відповідно з зображенням на рис.1 запишемо у вигляді

$$\Phi = \Phi' e^{ik_1(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)} + \Phi'' e^{ik_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)},$$

$$\Pi = \Pi' e^{ik_1(x \sin \theta_1 + z \cos \theta_1)} + \Pi'' e^{ik_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)}, \quad (5)$$

де перші доданки відповідають нижній границі шару, а другі - верхній (рис.1). Тут $K_1 = \omega/C_1$, $K_t = \omega/C_t$ - хвильові числа для поздовжніх коливань і коливань зсуву. З виразу (1) одержуємо

$$K_1 \sin \theta_1 = K_t \sin \theta_t = K \sin \theta.$$

Тоді вирази (5) можна записати так:

$$\Phi = (\Phi' e^{ik_1 z \cos \theta_1} + \Phi'' e^{-ik_1 z \cos \theta_1}) e^{ik_1 x \sin \theta_1},$$

$$\Pi = (\Pi' e^{ik_1 z \cos \theta_1} + \Pi'' e^{-k_1 z \cos \theta_1}) e^{ik_1 x \sin \theta_1}. \quad (6)$$

Напруження в шарі можна записати у вигляді наступних виразів:

$$-i\omega\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{dV_x}{dx} + \frac{dV_x}{dz} \right) + 2\mu \frac{dV_z}{dz};$$

$$-i\omega\sigma_{zx} = \mu \left(\frac{dV_x}{dz} + \frac{dV_z}{dx} \right). \quad (7)$$

Граничні умови задачі при цьому будуть $V_z^I = V_z^{II}$; $\sigma_{zz} = -(P_0 + P_{виг})$; $\sigma_{zx} = 0$; $z = 0$,

$$V_z^{II} = V_z^{III}$$
; $\sigma_{zz} = -P_{пр}$; $\sigma_{zx} = 0$; $z = h. \quad (8)$

Тут $V^{I,II,III}$ - складові коливальної швидкості в середовищах I, II, III (рис.1).

Шість граничних умов (8) дають змогу визначити шість незалежних коефіцієнтів $A, B, \Phi', \Phi'', \Pi', \Pi''$. Для цього підставимо формули (6) у вирази (4) і потім у (7). Враховуючи граничні умови (8) і формули (2), одержуємо систему рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів. Використавши позначення, які введені в (1), запишемо остаточний результат

$$A = \frac{i(M^2 - N^2 + 1)}{2M + i(M^2 - N^2 - 1)};$$

$$B = \frac{2Ne^{-iR}}{2M + i(M^2 - N^2 - 1)}, \quad (9)$$

де

$$N = \frac{z_{2l} \cos^2 2\theta_t}{z_1 \sin P} + \frac{z_{2t} \sin^2 2\theta_t}{z_1 \sin \theta};$$

$$M = \frac{z_{2l} \cos^2 2\theta_t \text{ctg} P}{z_1} + \frac{z_{2t} \sin^2 2\theta_t \text{ctg} \theta}{z_1};$$

$$R = k_1 h \cos \theta; P = k_1 h \cos \theta_1; \theta = k_1 h \cos \theta_t;$$

$$z_1 = \frac{\rho_1 C_1}{\cos \theta}; z_{2l} = \frac{\rho_2 C_2}{\cos \theta_1}; z_{2t} = \frac{\rho_2 C_t}{\cos \theta_t};$$

$$\cos \theta_1 = \sqrt{1 - \frac{C_1^2}{C^2} \sin^2 \theta}; \cos \theta_t = \sqrt{1 - \frac{C_t^2}{C^2} \sin^2 \theta}.$$

При кутах падіння більше від критичного для поздовжньої і поперечної хвиль підкореневі вирази в двох останніх формулах стають від'ємними і тому

$$\cos \theta_1 = i \sqrt{\frac{C_1^2}{C^2} \sin^2 \theta - 1}; \cos \theta_t = i \sqrt{\frac{C_t^2}{C^2} \sin^2 \theta - 1}. \quad (10)$$

Цей метод можна використовувати також для дослідження взаємодії звукової хвилі з системою пружних шарів. Однак при цьому доводиться розв'язувати систему рівнянь з багатьма невідомими (для трьох твердих шарів у рідкому середовищі - 14 рівнянь з 14 невідомими). Рішення стає надмірно громіздким і аналітичний запис формул виявляється практично неможливим.

Набагато зручнішим є використання матриць переходу, які пов'язують значення коли-

вальних швидкостей і напружень на одній границі кожного шару зі значеннями швидкостей і напружень на другій границі [1, 2].

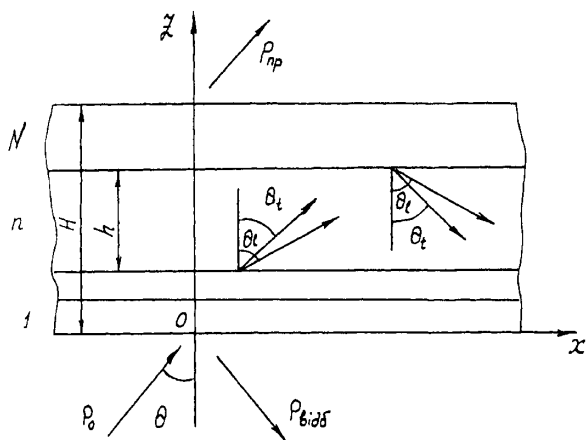


Рис.2.

Припустимо, що на нижній границі системи з N шарів (рис.2) задані значення складових вектора коливальної швидкості $V_x^{(0)}$ і $V_z^{(0)}$, а також нормальні й дотичні складові тензора напружень $\sigma_{zz}^{(0)}$ і $\sigma_{zx}^{(0)}$. Припустимо, що значення цих же величин на верхній границі дорівнюють $V_x^{(N)}$, $V_z^{(N)}$, $\sigma_{zz}^{(N)}$, $\sigma_{zx}^{(N)}$. Отже, на вході й виході системи шарів задані по чотири значення параметрів, причому кожний з вихідних параметрів залежить від усіх вхідних. Значить система шарів еквівалентна восьмиполоснику з чотирма виходами. Параметри цього восьмиполосника можна описати матрицею $\|A_{jk}\|$ ($j,k=1,2,3,4$). Зв'язок між значеннями швидкостей і напружень на верхній і нижній границях можна представити у вигляді системи чотирьох рівнянь, записаних у матричній формі

$$\begin{pmatrix} V_x^{(N)} \\ V_z^{(N)} \\ \sigma_{zz}^{(N)} \\ \sigma_{zx}^{(N)} \end{pmatrix} = \|A_{jk}\| \begin{pmatrix} V_x^{(0)} \\ V_z^{(0)} \\ \sigma_{zz}^{(0)} \\ \sigma_{zx}^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Значення елементів A_{jk} залежать від параметрів пружності шарів і підлягають визначенню. За відомими A_{jk} можна обчислити коефіцієнти проходження і відбиття звуку.

Хвилі, що падають, проходять і відбиваються, представимо, як і рішення, у формі (2). Граничні умови мають вигляд

$$P_{np} = -\sigma_{zz}^{(N)},$$

$$V_z^{(N)} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial P_{np}}{\partial z};$$

$$\sigma_{zx}^{(N)} = 0; z = H;$$

$$P_0 + P_{відб} = -\sigma_{zz}^{(0)};$$

$$V_z^{(0)} = \frac{1}{i\omega\rho} \frac{\partial (P_0 + P_{відб})}{\partial z};$$

$$\sigma_{zx}^{(0)} = 0; z = 0.$$

Застосувавши формули (2) і (11), одержимо систему рівнянь, в якій невідомими є $A, B, V_x^{(0)}, V_z^{(0)}, \sigma_{zz}^{(0)}$

$$A_{21}V_x^{(0)} + A_{22}V_z^{(0)} + A_{23}\sigma_{zz}^{(0)} = \frac{\cos\theta}{\rho C} B e^{iR};$$

$$A_{31}V_x^{(0)} + A_{32}V_z^{(0)} + A_{33}\sigma_{zz}^{(0)} = -B e^{iR};$$

$$A_{41}V_x^{(0)} + A_{42}V_z^{(0)} + A_{43}\sigma_{zz}^{(0)} = 0;$$

$$\sigma_{zz}^{(0)} = -(1 + A);$$

$$V_z^{(0)} = \frac{\cos\theta}{\rho C} (1 - A). \quad (12)$$

Використавши наступні позначення

$$M_{22} = A_{22} - \frac{A_{21}A_{42}}{A_{41}};$$

$$M_{23} = A_{23} - \frac{A_{21}A_{43}}{A_{41}}; R = KH \cos\theta;$$

$$M_{32} = A_{32} - \frac{A_{31}A_{42}}{A_{41}};$$

$$M_{33} = A_{33} - \frac{A_{31}A_{43}}{A_{41}};$$

$$z_0 = \frac{\rho C}{\cos\theta}, \quad (13)$$

рішення системи (12) набуде вигляду

$$A = \left(M_{22} + \frac{M_{32}}{z_0} - (M_{33} + M_{23}z_0) \right) / \left(M_{22} + \frac{M_{32}}{z_0} + (M_{33} + M_{23}z_0) \right),$$

$$B = \left(2(M_{33}M_{22} - M_{32}M_{23})e^{-iR} \right) / \left(M_{22} + \frac{M_{32}}{z_0} + (M_{33} + M_{23}z_0) \right).$$

(14)

Для визначення коефіцієнтів A_{jk} припустимо, що матриця переходу $\|a_{jk}^{(n)}\|$ для довільного шару з номером n відома. Тоді значення $V_x^{(n)}, V_z^{(n)}, \sigma_{zz}^{(n)}, \sigma_{zx}^{(n)}$ на границі шарів n і $n-1$ можна визначити з матричного співвідношення

$$\begin{pmatrix} V_x^{(n)} \\ V_z^{(n)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} \\ \sigma_{zx}^{(n)} \end{pmatrix} = \|a_{jk}^{(n)}\| = \begin{pmatrix} V_x^{(n-1)} \\ V_z^{(n-1)} \\ \sigma_{zz}^{(n-1)} \\ \sigma_{zx}^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Використовуючи рекурентне співвідношення, одержуємо

$$\begin{pmatrix} V_x^{(N)} \\ V_z^{(N)} \\ \sigma_{zz}^{(N)} \\ \sigma_{zx}^{(N)} \end{pmatrix} = \|a_{jk}^{(N)}\| \|a_{jk}^{(N-1)}\| \dots \|a_{jk}^{(1)}\| = \begin{pmatrix} V_x^{(0)} \\ V_z^{(0)} \\ \sigma_{zz}^{(0)} \\ \sigma_{zx}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Врахувавши останнє співвідношення і формулу (11), запишемо

$$\|A_{jk}\| = \|a_{jk}^{(N)}\| \|a_{jk}^{(N-1)}\| \dots \|a_{jk}^{(1)}\|. \quad (16)$$

Отже, матрицю $\|A_{jk}\|$ можна одержати перемноженням матриць $\|a_{jk}^{(N)}\|$, починаючи з матриці

для останнього шару. Треба відмітити, що матриці при перемноженні не комутують, тому змінювати порядок перемноження в формулі (16) не можна. Фізично це відповідає тому, що коефіцієнти відбиття й проходження залежать від порядку слідування шарів.

Визначимо елементи перехідної матриці $\|a_{jk}\|$ для довільного суцільного пружного шару з номером n . Індекс n для спрощення запису випускаємо. Початок координат для наступних обчислювань краще зсунути на границю між шарами з номерами n і $n-1$.

За допомогою введення скалярного і векторного потенціалів виразимо коливальні швидкості й напруження згідно з (3)-(7). Для верхньої границі шару (при $z=h$) одержимо

$$\begin{pmatrix} V_x^{(n)} \\ V_z^{(n)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} \\ \sigma_{zx}^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ij \cos p & -\gamma \sin p & -i\beta \cos \theta & \beta \sin \theta \\ -\alpha \sin p & i\alpha \cos p & -\gamma \sin Q & i\gamma \cos Q \\ -\frac{i}{\omega} (\lambda K_1^2 + 2\mu\alpha^2) \cos p & \frac{(\lambda K_1^2 + 2\mu\alpha^2) \sin p}{\omega} & -\frac{2\mu\alpha\gamma}{\omega} \cos Q & -\frac{2\mu\alpha\gamma}{\omega} \sin Q \\ \frac{2\mu\alpha\gamma}{\omega} \sin p & -\frac{i2\mu\alpha\gamma}{\omega} \cos p & -\frac{i}{\omega} (\beta^2 - \gamma^2) \sin Q & \frac{i\mu}{\omega} (\beta^2 - \gamma^2) \cos Q \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \Phi' + \Phi'' \\ \Phi' - \Phi'' \\ \Pi' - \Pi'' \\ \Pi' + \Pi'' \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{aligned} K_1 h \cos \theta_1 &= p; K_t h \cos \theta_t = Q; K_1 \cos \theta_1 = \alpha; \\ K_t \cos \theta_t &= \beta; \gamma = K_1 \sin \theta_1 = K_t \sin \theta_t. \end{aligned} \quad (18)$$

Для нижньої границі шару (при $z=0$), враховуючи, що $P=Q=0$ і формулу (17), знаходимо

$$\begin{pmatrix} V_x^{(n-1)} \\ V_z^{(n-1)} \\ \sigma_{zz}^{(n-1)} \\ \sigma_{zx}^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\gamma & 0 & i\beta & 0 \\ 0 & i\alpha & 0 & i\gamma \\ -\frac{i}{\omega} (\lambda K_1^2 + 2\mu\alpha^2) & 0 & -\frac{i2\mu\alpha\gamma}{\omega} & 0 \\ 0 & -\frac{2\mu\alpha\gamma}{\omega} & 0 & \frac{i\mu(\beta^2 - \gamma^2)}{\omega} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \Phi' + \Phi'' \\ \Phi' - \Phi'' \\ \Pi' - \Pi'' \\ \Pi' + \Pi'' \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Усунемо з рівнянь (17) і (19) значення $\Phi' \pm \Phi'', \Pi' \pm \Pi''$. Для цього розв'яжемо систему рівнянь (19) відносно даних значень, а потім отримані значення підставимо в праву частину

системи (17). У результаті одержуємо матрицю переходу для одного шару $\|a_{jk}\|$, коефіцієнти якої визначасмо наступними виразами:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2 \sin^2 \theta_t \cos P + \cos 2\theta_t \cos Q; \\ a_{12} &= i(\operatorname{tg} \theta_1 \cos 2\theta_t \sin P - \sin 2\theta_t \sin Q); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{13} &= \frac{\sin Q_1}{\rho C_l} (\cos Q - \cos P); \\
 a_{14} &= -\frac{i}{\rho C_t} (\operatorname{tg} \theta_1 \sin \theta_t \sin P + \cos \theta_t \sin Q); \\
 a_{21} &= i(2\operatorname{ctg} \theta_1 \sin^2 \theta_t \sin P - \operatorname{tg} \theta_t \cos 2\theta_t \sin Q); \\
 a_{22} &= \cos 2\theta_t \cos P + 2\sin^2 \theta_t \cos Q; \\
 a_{23} &= -\frac{i}{\rho C_l} (\cos \theta_1 \sin P + \operatorname{tg} \theta_t \sin \theta_1 \sin Q); \\
 a_{31} &= 2\rho C_t \sin \theta_t \cos 2\theta_t (\cos Q - \cos P); \\
 a_{32} &= i\rho C_t^2 \left(\frac{2}{C_l} \cos \theta_1 \sin^2 \theta_t \sin P + \frac{\cos^2 \theta_t}{2C_t \cos \theta_t} \sin Q \right).
 \end{aligned} \tag{20}$$

Матриця $\|a_{jk}\|$ є симетричною відносно діагоналі $a_{14} = a_{41}$. Тому $a_{44} = a_{11}$, $a_{42} = a_{31}$, $a_{43} = a_{21}$, $a_{33} = a_{22}$, $a_{24} = a_{13}$, $a_{34} = a_{12}$.

Значить, визначені всі значення, які входять у вирази (14).

Як наслідок вищеописаного можна відмітити наступне.

Коефіцієнти А і В багат шарової плоскої структури визначають за допомогою виразів (14), в яких елементи A_{jk} згідно з (16) можна одержати перемноженням матриць для кожного окремого шару. Елементи цих матриць визначають за формулами (20).

Головну складність при виконанні розрахунків - перемноження матриць - легко подолати, використавши комп'ютер, і, отже, знаючи параметри шарів плоскої багат шарової структури, можна досить легко визначити коефіцієнти проходження й відбиття.

На завершення необхідно зробити декілька зауважень про можливість врахування поглинання в шарах у всіх методах, які були розглянуті. При наявності поглинаючих шарів загасання в них можна врахувати за допомогою введення комплексного хвильового числа

$$K_n = K'_n + iK'', \tag{21}$$

де K'_n - визначає фазову швидкість хвилі, а K'' - загасання.

Якщо часова залежність задана в вигляді $e^{-i\omega t}$, фазовий множник такої хвилі має вигляд

$$e^{-i(\omega_n t - K_n r)}, \tag{22}$$

Виділяючи множник, який залежить від K''_n , запишемо

$$e^{-i(\omega_n t - K_n r)} = e^{-K''_n r} e^{i(\omega_n t - K'_n r)}.$$

Отже, введення комплексного хвильового числа в вигляді (21) при використанні часової залежності вигляду (22) дійсно дає загасаючу хвилю.

Запропонований у даній статті метод дає можливість розрахувати параметри гармонійних пружних хвиль, які розповсюджені в багат шарових структурах, враховуючи загасання в поглинаючих шарах. Наведений також зручний для комп'ютерних обчислювань матричний метод визначення коефіцієнтів проходження і відбиття таких багат шарових структур при довільній кількості шарів.

Розроблені теоретичні методи й підходи можна застосовувати для теоретичного обґрунтування й вдосконалення методів неруйнівного контролю якості багат шарових структур, а також для подальших теоретичних досліджень у даній галузі.

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М., 1957.
2. Карпачи О.М., Рубцов Ю.К. Уточненный анализ отражения и преломления пучков высокочастотных упругих волн при поперечном распространении в цилиндрических волноводах / Прикл. механика. 1994. 30, №3. С.49-57.
3. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Герметическая оптика неоднородных сред. М., 1980.
4. Подильчук Ю.П., Рубцов Ю.К. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн. К., 1988.
5. Шандеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики. Л., 1972.