

## ВІЗУАЛІЗАЦІЯ ФІЗИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ ТА ПРОЦЕСІВ НА ОСНОВІ СТВОРЕННЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

*І.П.Тарас, І.В.Павлик*

*ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) 45369,  
e-mail: erylart@mail.ru*

*Експериментальні дані часто представляють 2-D або 3-D дискретною множиною точок. Різні фізичне походження дискретних даних вимагає застосування окремих інтерполяційних схем. Візуалізація фізичних процесів і об'єктів вимагає побудови безперервних кривих або поверхонь певного порядку гладкості, найчастіше за відсутності додаткової інформації про кривизну у вузлових точках або на границі. Розглядається використання різних інтерполяційних схем на основі сум функцій з дзвоноподібними графіками для таких інтерполяційних задач.*

*Ключові слова: дискретні множини, дискретний ряд інтерполяційні схеми, інтерполяційні функції, інтерпольовані поверхні.*

*Экспериментальные данные часто представляют 2-D или 3-D дискретным множеством точек. Отличие в физическом происхождении дискретных данных требует использования различных интерполяционных схем. Визуализация физических процессов и объектов требует построения непрерывных кривых или поверхностей определенного порядка гладкости, чаще всего при отсутствии дополнительной информации о кривизне в узловых точках или на границе. Рассматривается использование различных интерполяционных схем на основе сум функций с колоколообразными графиками для таких интерполяционных задач.*

*Ключевые слова: дискретные множества, дискретный ряд интерполяционные схемы, интерполяционные функции, интерполированные поверхности.*

*Frequently the experiment data represent a 2-D or 3-D discrete set of points. The different physical sources of discrete data demands different interpolation patterns. Visualization of physical processes and objects demands construction of the continuous curves or surfaces of the defined level of geometric continuity, frequently for lack of the additional information on curvature of the set points or polygon boundaries. This article develops a calculus for solving that interpolation problem by using the different interpolation patterns based on the sum of bell-shaped basis functions.*

*Key words: environmental safety, drilling wastes, environment, washing liquid*

Дослідження фізичних об'єктів та процесів вимагає їх чисельного опису, представлення взаємозалежностей параметрів, якими описується об'єкт або процес. Найбільша когнітивність притаманна візуальному представленню чисельного опису – представлення залежностей кривими або поверхнями, що залежить від взаємозалежності параметрів. Найчастіше числовий опис базується на експериментальних даних. Такі дані є дискретною множиною. Залежно від кількості незалежних параметрів дані можуть бути представлені дискретними кривими або дискретними поверхнями.

Якщо задавати незалежні параметри з певним кроком, то результати експериментів будуть задані на регулярній сітці, але не завжди є така можливість, тому часто дані представлені на нерегулярній сітці.

Перетворення дискретно заданої функції в неперервний вигляд – це важлива задача. Різні фізичне походження дискретних даних вимагає окремих способів і схем інтерполяції. Відомі B-сплайн, NURBS та ін. [1, 2, 3].

Неперервна модель повинна володіти геометричними властивостями (також і диференційними), які відповідають фізичній природі дискретних даних.

Багато технічних задач вимагає побудови неперервних кривих або поверхонь певного порядку геометричної гладкості, часто за відсу-

тності додаткової інформації стосовно кривини в точках заданого масиву або на границях задання поверхні.

Для розв'язання таких задач можна використовувати кускову або неперервну інтерполяцію. Кожна з них володіє перевагами та недоліками, тому їх вибір залежить від кожної реальної задачі. Параметризація, яка використовується при інтерполяції теж залежить від фізичної природи даних та від способу їх одержання. Наприклад, моделювання реальної свердловини базується на основі інклінометричних даних, тому зручно застосувати для моделювання просторової кривої натуральну параметризацію і постійний крок даних.

Кускова інтерполяція потребує координації або визначення значень похідних в точках вузлах.

Неперервна інтерполяція має свої переваги. Серед корисних властивостей цього методу – забезпечення заданого порядку гладкості (без додаткової інформації). До недоліків відносятся довжина многочлена інтерполяційної функції.

Інтерполяційну функцію представляють сумою функцій-доданків.

Зручно використовувати функції, які мають дзвоноподібні графіки. Дзвоноподібні графіки властиві тригонометричним функціям, функції Гауса, функції гіперболічного секанса

і т.д. Використання таких функцій для пласкої та просторової кривої розглядалося в [4, 5]. Подібні графіки властиві і дробово-раціональним функціям. Таким функціям властивий обмежений ефективний інтервал [6].

Зручно уявити графік поверхні, представлені сумарною функцією, як суперпозицію дзвоноподібних графіків функцій-доданків поверхонь, що мають вертикальні осі у вузлах (тобто у точках, в яких задане значення функції).

В загальному вигляді інтерполяційна функція для поверхні запишеться як

$$s(u, v) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot B_i(u, v, u_i, v_i), \quad (1)$$

де  $s, u, v$  – координати простору побудови функції,  $u_i, v_i$  – значення координат у вузлових точках,  $B_i$  – функції, що мають здебільшого однакову структуру.

Якщо за параметри поверхні прийняти декартові координати, то інтерполяційна функція визначиться

$$z(x, y) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot B_i(x, y, x_i, y_i), \quad (2)$$

де:  $a_i$  – коефіцієнти базових функцій;  $B_i, x_i, y_i$  – координати вузлів поверхні.

Для описання просторової кривої в явному вигляді залежність запишеться як

$$y(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot B_i(x, x_i), \quad (3)$$

$$z(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot B_i(x, x_i), \quad (3)$$

де параметром зміщення функцій-доданків обирається ордината точки дискретного ряду  $x_i$ .

Для параметричного задання кривої функція набуде вигляду

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot B_{ij}(t_{ij}, t), \quad (4)$$

де  $t_{ij}$  – параметр зміщення, яким може бути номер точки дискретного ряду, або довжина дуги (переважно апроксимована відстанню між вузлами точок). В декартовій системі координат  $x_j$  прийме значення координат  $x, y$  та  $z$  (для просторової кривої).

Для того, щоб обрати конкретну базову функцію (функцію-доданок) і її керуючі параметри, необхідно знати активну зону та вплив параметрів на функції [6].

Розглянемо одну з найпростіших дробово-раціональних функцій, які можна використовувати як базову для інтерполяційної функції у вигляді

$$y = 1/(1 + k \cdot x^2). \quad (5)$$

Вона характеризується одним керуючим параметром  $k$ , що є зручним при обмеженій інформації про характеристики дискретної поверхні.

Інтенсивність впливу функції на периферійні ділянки залежить від значення  $k$ .

Базовими функціями в інтерполяційній функції можуть бути і більш складні дробово-раціональні функції, але в деяких задачах мала кількість керуючих параметрів – швидше перевага, ніж недолік.

Розглянемо як тестову пряму  $y(x) = x$  дискретно задану множиною з десятих точок. Для плоскої кривої інтерполяційна функція виглядає

$$y(x) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + k_i \cdot (x - t_i)^2}. \quad (6)$$

Добре видно, що зміна керуючого параметра інтерполяції призводить до зміни точності інтерполяції на такий же порядок (рис. 1).

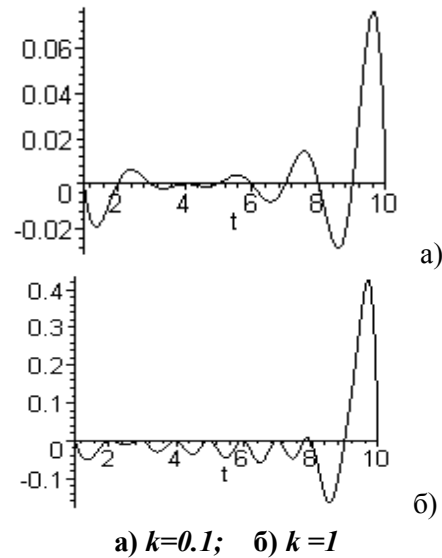
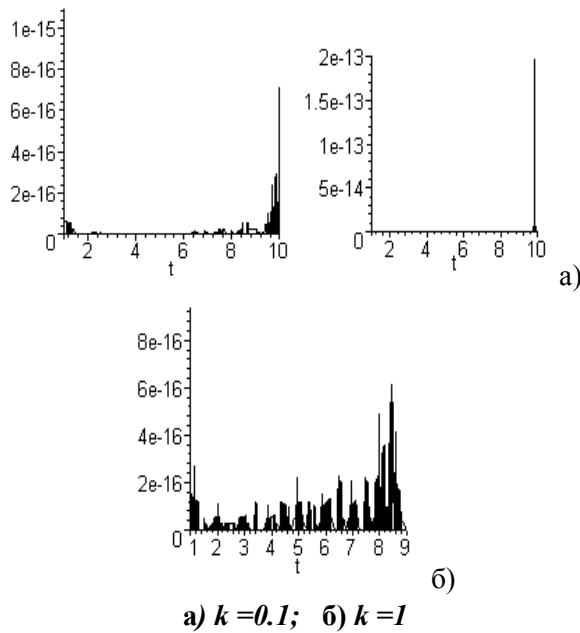


Рисунок 1 – Абсолютна похибка інтерполяційної функції (6)

Якість інтерполяційної функції для плоскої кривої можна характеризувати функцією кривини (рис. 2). Навіть при більшому зі значень керуючого параметра функції кривини інтерполяційної функції, попри існування осциляцій, має мізерну абсолютну похибку відносно неперервної.

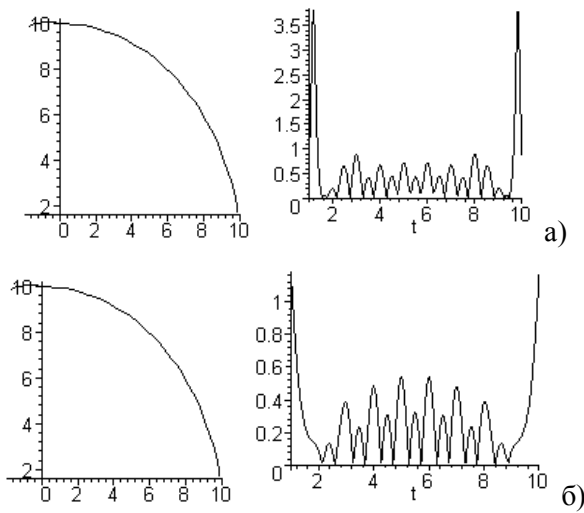
Хоча у разі використання єдиного значення керуючого параметру  $k_{ij}$  його зменшення призводить до зменшення осциляції самої кривої та згладжує диференційні параметри при різних видах функцій-доданків, проте у всіх випадках на границях інтерполяційної зони спостерігається посилення осциляцій як кривої, так і її диференційних параметрів [8].

Розглянемо, як поводитиме себе інтерполяційна крива та функція її кривини, якщо використати різні значення керуючого параметра  $k_{ij}$  в одній формулі. Результати проілюструємо одним із тестових розрахунків – дискретним рядом координат  $x, y$  – точок, розташованих на колі радіусом 10.



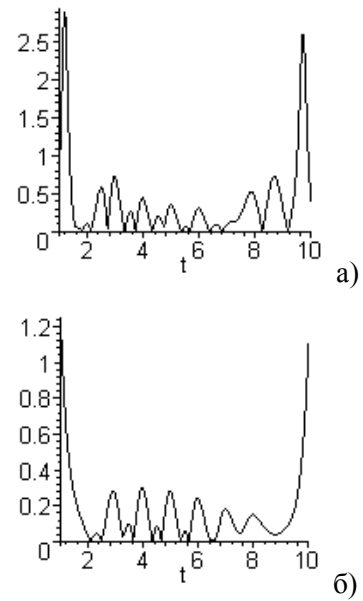
а)  $k=0.1$ ; б)  $k=1$   
**Рисунок 2 – Кривина інтерполяційної функції (6)**

Використаємо як незалежний параметр  $k$ , а  $i, j$  – номери заданих точок. Використання меншого значення  $k_{ij}$  в першій і останній точках ( $i=1, 10$ ) призводить до загального згладження кривої, що визначає кривину інтерполяційної кривої (рис. 3).



а) за керуючого параметра  $k_{ij}=1$ ;  
 б) за того ж значення керуючого параметра  $k_{ij}$  (крім  $k_{1j} = k_{10j} = 0.1$ )  
**Рисунок 3 – Інтерполяційна крива на основі функції (6) та її кривина**

Ще більший вплив на згладження функції кривини мало використання менших значень “крайових” керуючих параметрів при параметричній інтерполяції координат на основі різних функцій, наприклад  $x(t)$  – на основі функції (6), а  $y(t)$  – на основі експотенціальної функції (рис. 4).



а) за керуючого параметра  $k_{ij}=1$ ;  
 б) за того ж значення керуючого параметра  $k_{ij}$  (крім  $k_{1j} = k_{10j} = 0.1$ )  
**Рисунок 4 – Кривина інтерполяційної кривої на основі функції (6) для  $x(t)$  та на основі експотенціальної функції для  $y(t)$**

Якщо ускладнити інтерполяційну функцію, задавши залежність керуючого параметра  $k_{ij}$  від номера точки (а точніше від її положення на інтерполяційному інтервалі), можна змінити поведінку функції кривини. Використання різних значень керуючого параметра  $k_{ij}$  в одній функції призводить або до зменшення стрибків кривини на краях інтерполяційного інтервалу, або до її згладження всередині інтервалу (рис. 5). Побудуємо поверхню на основі вказаної вище дробово-раціональної функції (4)

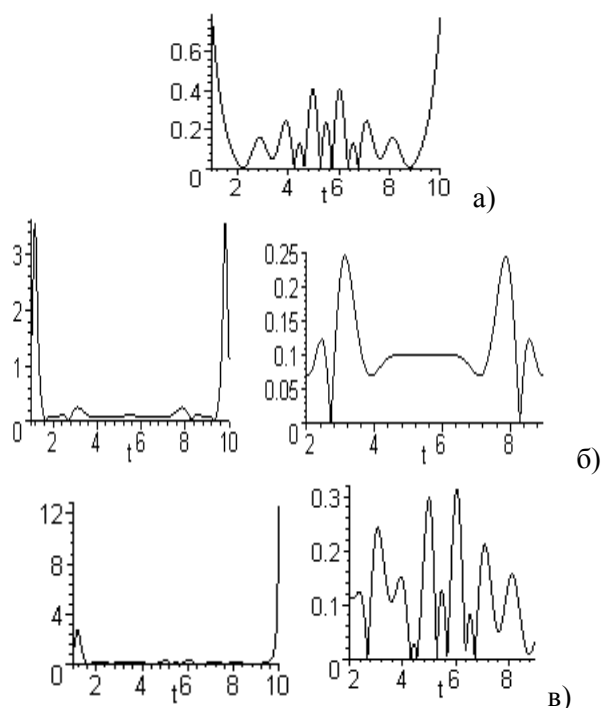
$$z = 1/(1 + kx^2 + my^2). \quad (7)$$

Якщо  $k = m$  функція (5) – буде функцією поверхні обертання (рис. 6).

Використавши (2) і (5), в загальному вигляді інтерполяційна функція запишеться як

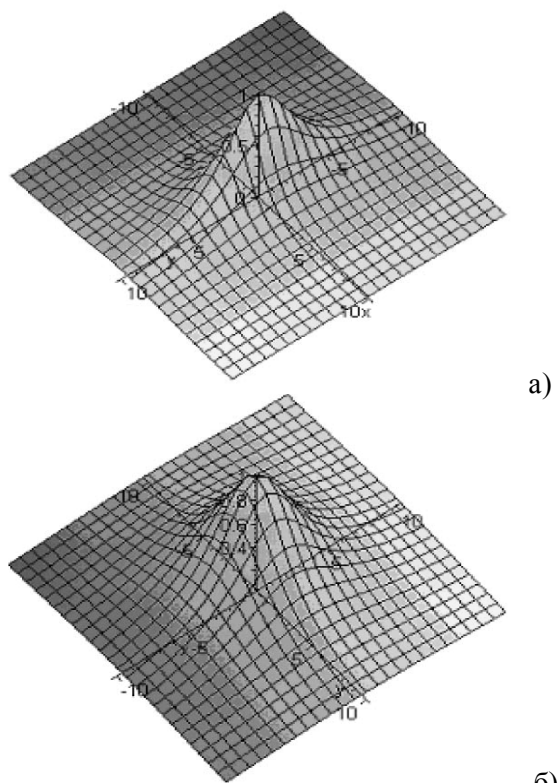
$$z(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + k_i \cdot (x - t_i)^2 + m_i \cdot (y - p_i)^2}, \quad (8)$$

де:  $k_i$  і  $m_i$  – параметри керування (підбираються залежно від початкових даних і схеми інтерполяції). Їх вплив на результуючу поверхню розглянуто в [6];  $t_i$  і  $p_i$  – параметри зміщення осі обертання функції-доданку. В загальному випадку  $t_i$  і  $p_i$  – координати точок масива інтерполяції. Якщо масив регулярний (як і для інтерполяції кривих), цими параметрами можуть бути індекси цих точок в масиві. Коефіцієнти  $a_i$  розраховуються з умови єдиності системи лінійних рівнянь. Умова – поверхня інтерполяції проходить через всі точки масиву.



а) у разі збільшення значення  $k_{ij}$  від країв до середини інтерполяційного інтервалу;  
 б) у разі зменшенні значення  $k_{ij}$  від країв до середини інтерполяційного інтервалу,  
 в) у разі збільшення значення  $k_{ij}$  від країв до середини інтерполяційного інтервалу для  $x(t)$  і навпаки – для  $y(t)$

Рисунок 5 – Кривина інтерполяційної кривої на основі функції (6)



а)  $k \neq m$ , б)  $k = m$

Рисунок 6 – Поверхні (7)

Якщо відомі диференційні характеристики в вузлах, то кількість рівнянь в системі збільшується, що уможливорює розрахунок коефіцієнтів  $k_i$  і  $m_i$ , але система рівнянь вже не буде лінійною.

Для ілюстрації проведених досліджень представимо як тестову частину площини  $-10 \leq x \leq 10$  і  $-10 \leq y \leq 10$ .

$$z(x, y) = 0.5 \cdot x + 0.5 \cdot y + 10. \quad (9)$$

Також проілюструємо інтерполяцію на четвертині сфери з центром в початку координат та радіусом  $R=10$ .

Для тестування вибраний нерівномірний масив точок (рис. 7).

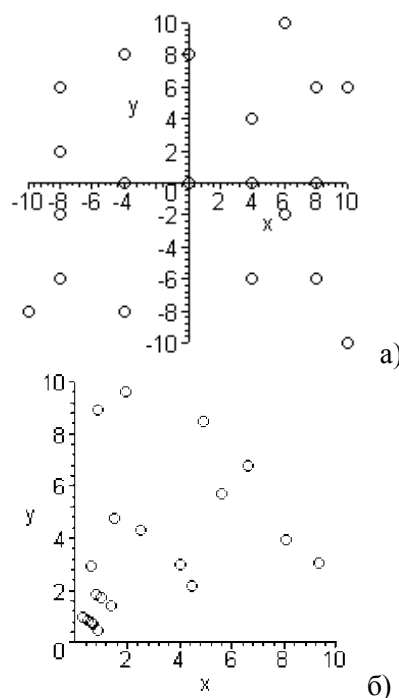


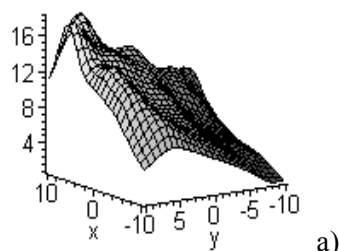
Рисунок 7 – Розміщення вузлів на тестовій площині (9) (а) та сфері в плані (б)

Дослідження впливу параметрів  $k$  свідчить, що зменшення їх значень призводить до зменшення осциляцій і деформації, особливо на контурі заданого відсіка (рис. 8 і 9). Але в той же час призводить до збільшення зони впливу окремого доданка, що ускладнює розбивання многочлена на менші многочлени.

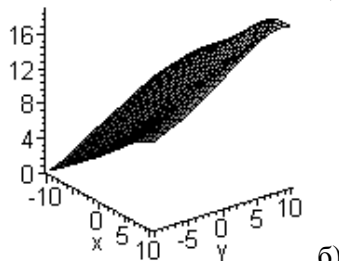
При порівнянні тестових представлень площини дробово-раціональною та Гауссовою функціями видно, що для функції Гауса інтенсивність впливу параметра  $k$  є значно більшою, тому в граничних вузлах краще використовувати функцію Гауса і менший параметр  $k$  (особливо у разі нерівномірного їх задання).

Важливою характеристикою для інтерполяційної функції є її точність (рис. 10 і 11).

Якість інтерполяційної функції для поверхні можна характеризувати функцією Гауссової кривини. Найпростіше прослідкувати відповідність кривизни тестовій поверхні на прикладі площини (рис. 12). Як засвідчили дослідження,



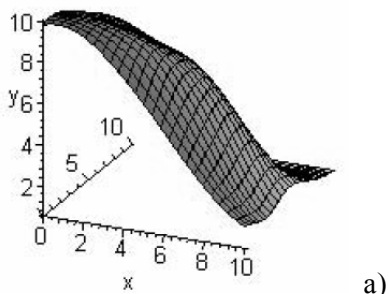
а)



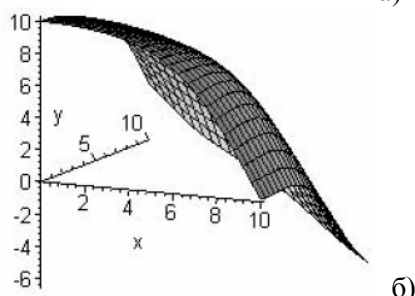
б)

а)  $k = 0.1$ , б)  $k = 0.01$

Рисунок 8 – Площина, інтерпольована функцією (8)



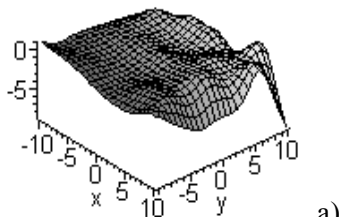
а)



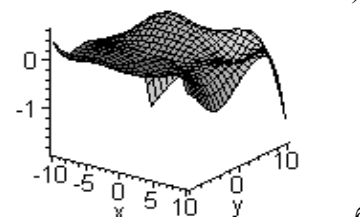
б)

а)  $k = 0.1$ , б)  $k = 0.01$

Рисунок 9 – Сфера, інтерпольована функцією (8)



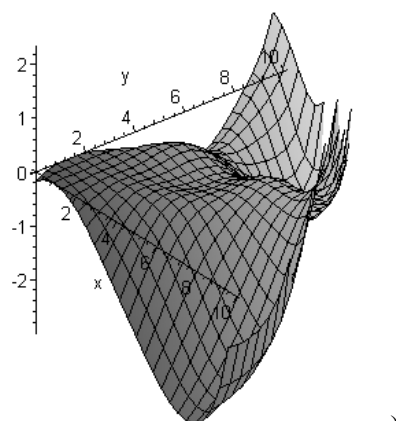
а)



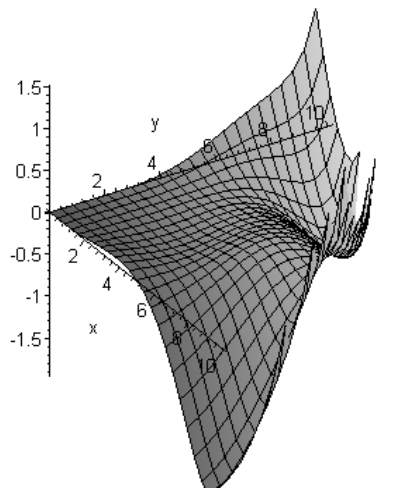
б)

а)  $k = 0.1$ , б)  $k = 0.01$

Рисунок 10 – Абсолютна похибка інтерполяційної функції (8) та тестової (9)



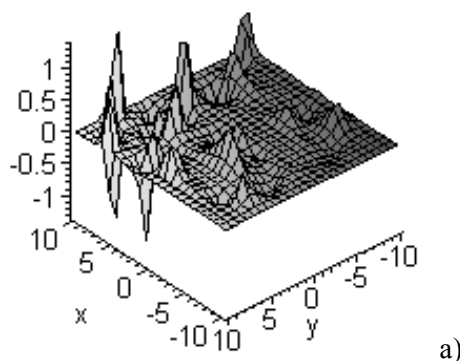
а)



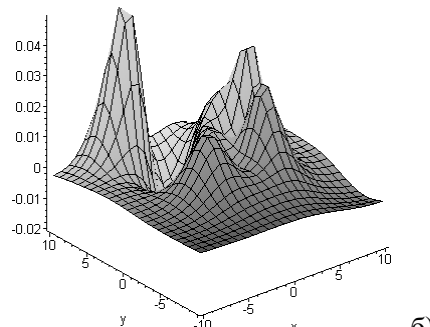
б)

а)  $k = 0.1$ , б)  $k = 0.01$

Рисунок 11 – Абсолютна похибка інтерполяційної функції (8) сфери



а)



б)

а)  $k = 0.1$ , б)  $k = 0.01$

Рисунок 12 – Гауссова кривина інтерполяційної функції площини

зменшення значення параметра  $k$  на порядок зменшує похибку Гауссової кривини інтерполяційної функції на два порядки.

Як би не осцилювала функція кривини, вона завжди залишається неперервною функцією, що є важливим, а головне, відповідає природі багатьох фізичних процесів.

### Висновки

Дискретно задані криві та поверхні при перетворенні їх в неперервний вигляд для більшої достовірності моделі потребують різної поведінки кривини залежно від фізичної природи даних. Зменшення значення параметрів керування інтерполяційної функції згладжує інтерпольовану поверхню, але при цьому розширює зону впливу функції-доданку. Використання різних значень керуючого параметра, а також поєднання різних типів функцій-доданків в одній інтерполяційній функції дає можливість створювати неперервні моделі з необхідними обмеженнями на поведінку кривини. Підбором функції керуючого параметра від номера точки дискретного ряду можна змінювати поведінку кривини інтерполяційної кривої.

Дослідження схем інтерполяції для створення неперервної моделі, а також залежності поведінки інтерполяційної моделі від керуючих параметрів, дає можливість підбирати необхідні параметри інтерполяції для конкретної задачі.

### Література

- 1 C. de Boor A Practical Guide to Splines. – New York, Springer-Verlag, 1978.
- 2 James D. Foley et al. Introduction to Computer Graphics. – Addison-Wesley, 1994.
- 3 Les Piegl On NURBS: A Survey //IEEE Computer Graphics and Applications. – Vol. 11, No. 1. – Jan 01. 1991. – p. 55 -71.
- 4 Сидоренко Ю.В. Комп'ютерна реалізація різних способів параметризації інтерполяційної функції Гауса / Ю.В. Сидоренко, А.В. Сацкова // Прикл. геометрія та інж. графіка. – 2003. – Вип. 72. – С. 174 – 178.
- 5 Пилипака С.Ф. Дослідження інтерполяційної функції на основі суми графіків гіперболічного секанса / С.Ф. Пилипака, І.Ю.Хименко // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. – 2003. – Вип. 4, Т. 3.– С. 12 – 15.
- 6 Iryna Taras Data Interpolating Surfaces Using the Sum of Bell-Shaped Functions: 13<sup>th</sup> International Conference on Geometry and Graphics, (August, 3-8, 2008), – Dresden, Germany – 5 p.
- 7 Тарас І.П., Інтерполяція просторових дискретно заданих кривих за допомогою дзвоноподібних функцій / І.Т. Тарас // Наукові нотатки. Міжвузівський збірник (за напрямом „Інженерна механіка” – 2008. – Вип. 22, Ч.1. – С. 336 – 341.
- 8 Тарас І.П. Вплив виду інтерполяційної функції та її керуючих параметрів на диференційні характеристики кривої / І.Т. Тарас // Прикл. геометрія та інж. графіка. – 2008. – Вип.80. – С. 126-129.

Стаття надійшла до редакційної колегії

21.04.10

Рекомендована до друку професором

Петриною Ю.Д.