

# Дослідження та методи аналізу

---

УДК 621.327.2

## МОДЕЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ГІДРОПРИВОДАХ МАШИН

*В.С. Ловейкін, Ю.В. Човнюк, Л.С. Шимко*

*Національний аграрний університет, 03041, м. Київ, вул. Героїв Оборони, 15,  
тел. (044) 2415528*

*Загальні властивості поверхневих хвиль у гідроприводах машин нафтогазового обладнання й хвилі у спеціально сконструйованих електричних лініях передач розглянуто у нелінійній постановці. Показано, що ці хвилі мають ідентичні дисперсійні закони, їх пакети солітонів мають аналогічні характеристики. Встановлено, що поверхнева течія рідини та відеоімпульси електромагнітної лінії мають схожі властивості.*

*Общие свойства поверхностных волн в гидроприводах машин нефтегазового оборудования и волны в специально сконструированных электрических линиях передач рассмотрены в нелинейной постановке. Показано, что волны имеют идентичные дисперсионные законы, а их пакеты солитонов имеют аналогичные характеристики. Установлено, что поверхностное течение жидкости и видеоимпульсы электромагнитной линии имеют схожие свойства.*

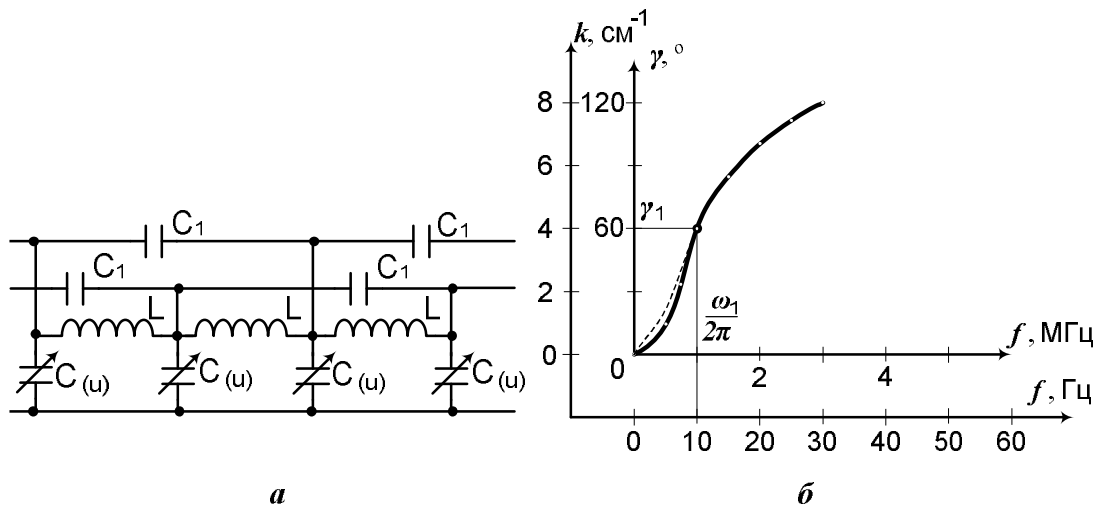
*Common features of surface waves in hydro drives of machines of oil and gas equipment and waves in specially designed electrical transmission lines are discussed. It is shown that these waves have analogous dispersion laws and their envelope solitons have the same characteristics. The similarity of the water mean surface current and the line video pulse, accompanying the wave packets, is established.*

**Постановка проблеми у загальному вигляді та її зв'язок з важливим науково-практичним завданням.** Короткі гравітаційні та гравітаційно-капілярні хвилі на поверхні морів є основними розсіявачами мікрохвиль при дистанційному зондуванні океанів з аерокосмічних платформ [1]. Саме значна модуляція цих компонентів хвилювання різними фізичними процесами, які протікають у приводній товщі атмосфери та верхніх прошарках океану, дає змогу оцінювати за радіовідбиттями про важливі властивості океанографічних явищ. Найбільш поширеною ситуацією на морі є досить висока інтенсивність коротких хвиль, котра обумовлює їх нелінійну динаміку. Для вивчення нелінійної динаміки часто моделюють гравітаційно-капілярні хвилі у лабораторних лотках [2], а також подібний підхід можна реалізувати для аналізу хвилеутворень у гідравлічних приводах будівельних машин та машин нафтогазового обладнання засобами і методами мехатроніки. Ще одна, хоча й не часто використовувана можливість полягає у моделюванні нелінійних

поверхневих хвиль, які, зокрема, утворюються у робочій рідині гідроприводів будівельних та машин нафтогазового обладнання за допомогою електромагнітних ліній передачі [3,4]. Це у свою чергу дає можливість вирішити проблему ідентифікації основних амплітудночастотних показників хвилеутворень, які виникають у подібних системах.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Нелінійну динаміку гравітаційних хвиль досліджено у роботах [1, 2]. Моделюванню хвиль на поверхні рідини за допомогою електричної лінії передач радіодіапазону і, зокрема солітонів, присвячено роботи [3-8]. Гравітаційно-капілярні солітони на поверхні рідини розглянуто у роботі [9]. Математичне моделювання нелінійних хвиль вищевказаного типу проведено у [10-11]. Автори [12] моделювали квазістаціонарні хвилі огинаючої у лінії передачі з варікапами.

Лабораторні дослідження течії, індукованої пакетом поверхневих хвиль огинаючої у лінії передачі з варікапами.



**Рисунок 1** — Еквівалентна схема лінії (а) та дисперсійна крива поверхневих хвиль на глибокій воді (суцільна лінія) й при глибині  $h = 3 \cdot 10^{-2}$  м (штрихована лінія) (б) точки - значення набігу фази на комірці, які виміряні у лінії

Лабораторні дослідження течії, індукованої пакетом поверхневих хвиль, проведено у [13].

Проте, у вищенаведених роботах відсутній аналіз впливу дисперсії поверхневих хвиль, викликаної поверхневим натягом, на процеси формування стаціонарних хвиль.

**Формулювання цілей статті.** Метою роботи є встановлення впливу високочастотної дисперсії поверхневих хвиль (обумовленої, у першу чергу, поверхневим натягом) на процеси формування стаціонарних хвиль – солітонів та хвильових пакетів – солітонів огинаючої. У якості моделі середовища (робочої рідини гідроприводів будівельних машин та машин нафтогазового обладнання) використано штучну лінію передач зі спеціально підібраними дисперсійними та нелінійними характеристиками у мегагерцовому діапазоні радіочастот.

**Виклад основного матеріалу**

**1. Характеристики лінії передачі**

Еквівалентну схему лінії зображено на рис. 1, а. Крім основних елементів комірки: індуктивності  $L$  й залежної від напруги ємкості  $C(u)$ , лінія має у своєму складі коригуючі ємкості  $C_1$ , які реалізують зв'язок через комірці. Диференціально-різницева рівняння для напруги  $u_n$  на  $n$ -й комірці має вигляд:

$$u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n \cdot L \cdot C_0 \cdot \frac{d^2 \cdot u_n}{dt^2} + L \cdot C_1 \cdot \frac{d^2}{dt^2} (u_{n+2} + u_{n-2} - 2u_n) = L \cdot \frac{d^2 Q^{nl}}{dt^2}, \quad (1)$$

де:  $C_0$  – постійна частина ємкості  $C(u)$ ;  $Q^{nl}$  – частина заряду  $Q = C_0 \cdot u + Q^{nl}$ , нелінійно залежна від напруги. Для лінеаризованого рівняння (1), представляючи розв'язок у вигляді  $u_n \sim \exp[i(\omega t - \gamma \cdot n)]$ , отримаємо наступне дисперсійне співвідношення:

$$\omega^2 = \frac{2 \cdot (1 - \cos \gamma)}{L \cdot C_0 \cdot \left[ 1 - 2 \cdot \frac{C_1}{C_0} \cdot (\cos \gamma - 1) \right]}. \quad (2)$$

Для конкретних параметрів:  $L = 10$  мкГн,  $C_0 = 300$  пФ,  $C_1 = 80$  пФ – залежність набігу фази на комірці лінії від частоти зображено на рис. 1 б (точки). На цьому ж рисунку у порівнюваному масштабі побудовано графіки дисперсійного рівняння поверхневих хвиль на воді [5]:

$$\omega^2 = (gk + Tk^3) \cdot th(kh), \quad (3)$$

де:  $k$  – хвильове число;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $T$  – коефіцієнт поверхневого натягу, віднесений до щільності води;  $h$  – глибина рідини.

У діапазоні частот 6...20 Гц на глибокій воді ( $kh \rightarrow \infty$ ) дисперсія лінії добре відтворює дисперсію гравітаційно-капілярних хвиль. З графіків видно, що вплив ввімкнених через комірці ємкостей  $C_1$  еквівалентний впливу поверхневого натягу на дисперсію гравітаційно-капілярних хвиль. При зменшенні глибини  $h$  залежність  $\omega(k)$  (3) наближається до дисперсійної кривої  $\omega(\gamma)$  (2) на ділянці більш низьких частот. За малих значень  $\gamma$  хвилі у лінії описуються задовільно відомим рівнянням Кортевега де Фріза ( $K\partial\Phi$ ) [6]; врахування ємкостей  $C_1$  змінює лише чисельний коефіцієнт при дисперсійному члені цього рівняння. Таким чином, вибором робочого діапазону частот можна моделювати різні види дисперсії поверхневих хвиль.

Нелінійні властивості моделі визначаються залежністю заряду  $Q^{nl}$  від прикладеної напруги  $u$ . При використанні діодних варікапів у якості ємкостей залежність  $Q(u)$  для невеликих напруг можна апроксимувати поліномом:

$$Q = C_0 \cdot u \cdot (1 + \alpha_1 \cdot u + \alpha_2 \cdot u^2), \quad (4)$$

де:  $\alpha_1 = (0,06 \dots 0,08) B^{-1}$ ;  $\alpha_2 = (0,02 \dots 0,03) B^{-2}$ ;  $C_0$  – ємкість при постійній напрузі запирання  $E_0$ .

Порівняння нелінійних властивостей лінії та поверхні води доцільно провести на прикладі своєрідного еталонного процесу – генерації другої гармоніки. Нехтуючи кубічним членом у виразі (4) й вважаючи, що виконані умови синхронізму, можна отримати залежність амплітуди другої гармоніки від довжини [7]:

$$A_2 = \frac{1}{2} \gamma_1 \cdot \alpha_1 \cdot A_1^2 \cdot n, \quad (5)$$

де  $A_1$  – амплітуда основної хвилі.

Відомо, що дисперсійна характеристика (3) допускає інерний синхронізм гравітаційно-капілярних хвиль [5] (див. рис. 1, б). У роботі [3] показано, що при точному синхронізмі на глибокій воді амплітуда вертикального переміщення поверхні на подвоєній частоті  $\eta_2$  має також лінійну залежність від відстані  $x$ :

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\kappa_1^2 \cdot (g + T \cdot \kappa_1^2)}{g + 12 \cdot T \cdot \kappa_1^2} \cdot \eta_1^2 \cdot x, \quad (6)$$

де  $\eta_1$  – вертикальне переміщення поверхні на основній частоті.

З (5) та (6) випливає, що коефіцієнту модуляції ємкості лінії, який складає для типових значень  $A_1 \approx (1,5 \dots 2)B$  величину  $\alpha_1 A_1 \approx 0,1 \dots 0,15$ , можна поставити у відповідність коефіцієнт «модуляції» переміщення вільної поверхні води (рідини), який має значення

$$\frac{\kappa_1 \cdot (g + T \cdot \kappa_1^2)}{g + 12 \cdot T \cdot \kappa_1^2} \cdot \eta_1 \approx 0,2 \dots 0,3 \quad (\text{для слабко-нелінійних хвиль типові значення}$$

$\frac{\kappa_1 \eta_1}{2\pi} \approx 0,1 \dots 0,2$  [5]). Таким чином, ефектив-

ність взаємодії хвиль у обох випадках виявляється приблизно однаковою. При порівнянні результатів слід мати на увазі, що у діапазоні частот 10...20 Гц (акустичні хвильові пакети (солітони) затухання поверхневих хвиль дещо вище, ніж хвиль у лінії розміщених подальше від критичної частоти (безрозмірні декременти

відповідно складають  $\frac{2\pi\delta}{\kappa} \approx 0,15$  та

$$\frac{2\pi\delta}{\gamma} \approx 0,08).$$

З вищенаведених оцінок випливає, що за основними характеристиками нелінійного хвильового процесу – дисперсію та нелінійністю – модель нелінійної лінії може бути близькою до реального середовища, у котрому розповсюджуються короткі поверхневі хвилі. Модель не враховує такі важливі властивості реального поверхневого хвилювання, як його двовимірність та індуковане або усереднене значення течії, незважаючи на це, експериментальне дослідження одновимірних хвиль, відтворюваних у гідроприводах машин нафтогазового обладнання та будівельних машин і у лабораторних умовах, фізично виправдане [2]. Експериментальне вивчення солітонів у лінії, в першу чергу солітонів огинаючої, представляє, зрозуміло, й самостійний інтерес.

## 2. Вплив дисперсії високого порядку на форму солітонів Кортевега – де Фріза

Розглянемо стаціонарні відеоімпульси – солітони у нелінійній лінії. Якщо характерна довжина хвилі значно перевищує розмір комірки, то використовуємо звичайний розклад у

ряд:  $u_{n\pm 1} = u_n + \sum_{l=1}^{\infty} (\pm 1)^l \cdot \frac{1}{l!} \cdot \frac{d^l u_n}{dn^l}$ , можна перетворити рівняння (1) у наближене рівняння з

неперервними змінними ( $\alpha_2 = 0$ ):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} - \frac{1}{v_0^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{1}{v_0^2} \cdot \alpha_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial n^4} + \frac{1}{360} \frac{\partial^6 u}{\partial n^6} + L \cdot C_1 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( 4 \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^4 u}{\partial n^4} + \frac{8}{45} \frac{\partial^6 u}{\partial n^6} \right) = 0, \quad (7)$$

$v_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C_0}}$  (індекс  $n$  у подальшому опускаємо).

Вводячи «біжучу» координату  $\xi = n - v_c \cdot t$ , де  $v_c$  – швидкість стаціонарної хвилі, й двічі інтегруючи отримане рівняння у звичайних похідних для односолітонного наближення ( $u(\pm \infty) \rightarrow 0$ ), одержуємо:

$$\beta_1 \cdot \frac{\partial^4 u}{\partial \xi^4} + \beta_2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (s-1) \cdot u - \alpha_1 \cdot s \cdot u^2 = 0, \quad (8)$$

де:

$$s = \frac{v_c^2}{v_0^2}, \quad \beta_1 = \frac{1}{360} + \frac{4}{3} s \cdot \frac{C_1}{C_0}, \quad \beta_2 = \frac{1}{12} + 4s \cdot \frac{C_1}{C_0}.$$

При  $\beta_1 = 0$  рівняння (8) має розв'язок у формі солітону  $Kd\Phi$ :

$$u = U_C \cdot [ch(k \cdot \xi)]^{-2}, \quad (9)$$

де амплітуда імпульсу  $U_C = u(\xi = 0)$  і його обернена ширина визначається виразами:

$$U_C = -\frac{3}{2\alpha_1} \cdot \frac{(s-1)}{s}, \quad K = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{s-1}{\beta_2}}. \quad (10)$$

Зазначимо, що у нашій лінії  $s > 1$ , оскільки  $\beta_2 > 0$ . Тому з (10) випливає, що добуток  $u_C \cdot \alpha_1 < 0$ , тобто додатному значенню коефіцієнту нелінійності відповідає солітон «від'ємної» полярності, і навпаки. Нагадаємо, що спостережувані на поверхні водної мілини солітони існують тільки у вигляді стаціонарного підвищення, яке має форму (9). Характерна протяжність солітону, яка визначається за рівнем  $0,5U_C$ , виражається співвідношенням:

$$L_C = \left( \frac{2}{k} \right) \cdot \ln \sqrt{2}. \quad (11)$$

Враховуючи вигляд  $\beta_2$  та використовуючи формулу (11), легко показати, що для ввімкнених коригуючих ємкостей  $C_1$  тривалість солітону зростає приблизно у  $\sqrt{48 \frac{C_1}{C_0}}$  разів у порівнянні з його тривалістю при  $C_1 = 0$ .

Як показано у [4], врахування поправки до нелінійності лінії, обумовленої відмінністю від нуля коефіцієнта  $\alpha_2$ , практично не змінює профіль солітонів. Дисперсія ж більш високого порядку ( $\beta_1 \neq 0$ ) визначає форму солітонів в околі «хвостів»: поряд з класичним експоненціально спадним профілем можливі солітони, «хвости» котрих описуються комбінацією експоненціальної та осцилюючої функцій. Для аналізу форми «хвостів» [8] достатньо дослідити характер розв'язку рівняння (8) для малих напруг  $u$ , коли можна знехтувати нелінійним членом. Підставляючи у це рівняння розв'язок  $u \sim e^{\lambda \xi}$ , отримуємо характеристичне рівняння:

$$\beta_1 \cdot \lambda^4 + \beta_2 \cdot \lambda^2 + (s - 1) = 0. \quad (12)$$

Рівняння (12) має два дійсних і два уявних корені. Оскільки експоненціально спадаючим та осцилюючим «хвостам» відповідають комплексно спряжені корені (12), зрозуміло, що у досліджуваній лінії можуть існувати лише солітони з експоненціальним профілем.

Звернемо увагу ще на одну особливість, пов'язану із врахуванням дисперсії більш високого порядку, ніж дисперсія звичайного рівняння  $Kd\Phi$ , а саме на можливість виконання умов синхронізму для певних частот. Розкладемо функцію  $\omega(\gamma)$  (2) у ряд, обмежуючись наближенням рівняння (8):

$$\omega = \frac{\gamma}{v_0} \cdot \left( 1 - \frac{a}{2} \cdot \gamma^2 + \frac{b}{2} \cdot \gamma^4 \right), \quad (13)$$

де  $a = \frac{1}{12} + 4 \frac{C_1}{C_0}$ ,  $b = \frac{4 \cdot C_1}{(3C_0)} + \frac{1}{360}$  (оскільки швидкість солітону лише трохи перевищує  $v_0$ , можна вважати  $a \approx \beta_2$ ,  $b \approx \beta_1$ ).

Розклад (13) дає змогу визначити частоти  $\omega_1$  та  $\omega_2 = 2\omega_1$ , для яких виконується умова

$$\gamma_2 = 2\gamma_1 \left( \gamma_1 \approx 0,78 \approx \frac{\pi}{4} \right).$$

Графічне виконання умов синхронізму для дисперсійної характеристики, розрахованої за точною формою (2)

$$\left( \gamma_1 \approx \frac{\pi}{3} \right), \text{ зображено на рис. 1, б. Таким чином,}$$

для компонент спектру солітона, які лежать у деякому околі  $\omega_1$ , з'являється можливість ефективного перетворення у частоту другої гармоніки (сумарну частоту). Цей ефект проявляє себе тим сильніше, чим більше амплітуда солітону, оскільки при цьому розширюється його спектр. Внаслідок такого механізму «випромінювання» одновимірний солітон виявляється, взагалі кажучи, нестійким.

Для спостереження солітонів пропонується використовувати штучну лінію, яка складається з 60...100 комірок, параметри котрих були наведені вище. У якості нелінійних ємкостей слід взяти варікапи Д 813, які знаходяться при постійному значенні запираючої напруги  $E_0 = -3V$ . При подачі на вхід лінії імпульсу від'ємної полярності, який має тривалість, дещо меншу очікуваної тривалості солітону  $\tau_c$  (рис. 2, а), профіль імпульсу буде змінюватись наступним чи-

ном. На 15-й-20-й комірках відбувається формування солітону з одночасним випромінюванням осцилюючого цугу (рис. 2, б). Параметри солітону задовільно описуються наближенням  $Kd\Phi$  (так, розрахована за формулою (11) тривалість складає  $\tau_c = 0,9$  мкс, а при вимірюваннях – наближується до 1 мкс). При подальшому розповсюдженні солітону з'являтиметься цуг другої гармоніки, який випереджає імпульс за рахунок більш високої групової швидкості (рис.2, в). При більших вхідних амплітудах імпульсу ( $|U_c| \geq 5B$ ) спостерігатиметься «укручення» переднього фронту солітону.

При подачі додатного імпульсу (це відповідає впадині на поверхні рідини) його стаціонарне розповсюдження у лінії, як впливає з (8), неможливе й відбувається значна деформація (руйнація) вихідного профілю (рис. 2, г).

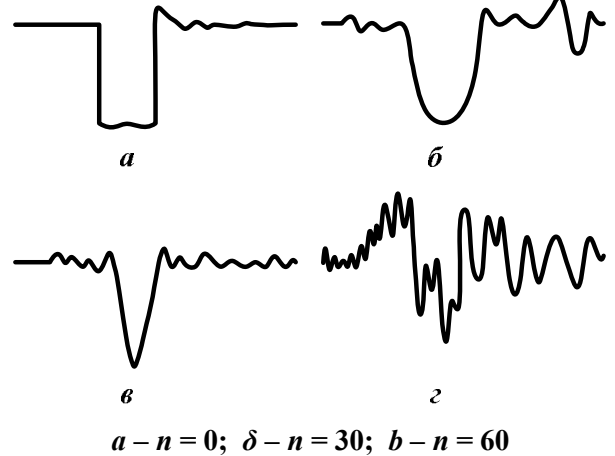


Рисунок 2 — Еволюція відеоімпульсу від'ємної полярності ( $\tau_{имп}=1$ мкс, амплітуда 10В) у лінії (а-в) і деформація (руйнація) імпульсу додатної полярності (г)

Розглянемо далі ситуацію, яка виникає для гравітаційно-капілярних хвиль. Розкладаючи (3) в ряд  $k \cdot h$ , отримуємо дисперсійне співвідношення, аналогічне (13):

$$\left\{ \begin{aligned} \omega &= k \cdot \sqrt{gh} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{a'}{2} \right) (kh)^2 + \left( \frac{b'}{2} \right) (kh)^4 \right], \\ a' &= \frac{1}{3} - \tilde{T}, \quad b' = \frac{2}{15} - \frac{\tilde{T}}{3}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{gh^2}. \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Чисельні значення коефіцієнтів розкладу у (13) і (14) виявляються одного порядку: у лінії  $\frac{a}{b} \approx 3$ , а при  $h \geq (2...3) \cdot 10^{-2}$  м.  $\frac{a'}{b'} \approx 2,5$ . Звідси впливає можливість синхронного випромінювання у другу гармоніку солітону на поверхні води; реальна тривалість його повинна скласти десятки долі секунди.

Як видно з (14), поверхневий натяг у рідині скінченної (малої) глибини нейтралізує дисперсію у низькому порядку, що відповідає перетворенню у нуль  $a'$ . Для виконання такої умови у лінії необхідно ввести додатковий позитивний (додатній) індуктивний зв'язок між сусід-

німи котушками. При вимкнених ємкостях  $C_1$  коефіцієнт  $\beta_2$  у рівнянні (8) матиме вигляд:

$$\beta_2 = \frac{1}{12} - M \cdot s. \quad (15)$$

При значенні коефіцієнту взаємодукції  $M \approx 0,1$  дисперсія лінії буде визначатись коефіцієнтом  $\beta_1$ . Як випливає з (15), точна компенсація дисперсії можлива, строго кажучи, тільки для певної амплітуди (швидкості) солітону. Стационарні імпульси у такій лінії описуються рівнянням типу  $K\partial\Phi$ , у якому дисперсійний член представляє собою п'яту похідну по координаті  $n$ . Задовольняючи цьому рівнянню солітони з осцилюючими «хвостами» спостерігалися у роботі [5].

Збудження солітонів з таким профілем на поверхні рідини важко реалізувати. По-перше, для води  $a'=0$  на глибині  $h = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ , де сильно зростає роль в'язкості. По-друге, зміна типу дисперсії середовища призводить до нестійкості одновимірних солітонів у відношенні до поперечних збурень [9].

### 3. Нелінійні рівняння Шредінгера для лінії. Спостереження «світлих» та «темних» солітонів

Моделювання одновимірних пакетів поверхневих хвиль, які описуються нелінійним рівнянням Шредінгера [2, 10], у нелінійній лінії представляє собою більш важку задачу, ніж дослідження відеосолітонів. Це пов'язано з тим, що для спостереження ефектів самовпливу радіоімпульсів необхідно синтезувати нелінійність більш високого порядку (а саме кубічну), крім того, використання частотного діапазону з сильною дисперсією неминує призведе до зростання впливу втрат і дискретності лінії.

Наведемо кінцеві результати виведення рівняння Шредінгера для лінії, комірка котрої відображена на рис. 1, а, нехтуючи затуханням. Розв'язок (1) подамо у вигляді сум ( $\varepsilon \ll 1$ ):

$$u_n(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \bar{A}_0^{(m)}(\xi, \tau) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \varepsilon^m \cdot \bar{A}_l^{(m)}(\xi, \tau) \cdot \exp[i l \cdot (\omega t - \gamma n)] + k.c.; \quad (16)$$

$$i = \sqrt{-1}.$$

Обмежуючись наближенням дисперсії для  $K\partial\Phi$  (див. вище), враховуючи члени порядку малості не вище  $\varepsilon^3$  і вважаючи відношення коефіцієнтів нелінійності  $\alpha_2 \cdot |u_n| / \alpha_1 \sim \varepsilon$ , для комплексної амплітуди основної гармоніки  $\bar{A} = \bar{A}_1$ , отримаємо рівняння:

$$i \cdot \bar{A}_\tau + N \cdot \bar{A}_{\xi\xi} + P \cdot |\bar{A}|^2 \cdot \bar{A} = 0, \quad (17)$$

де:  $\tau = \varepsilon^2 \cdot t$  – «повільний» час;

$\xi = \varepsilon(x - V \cdot t)$  – «біжуча» координата;

$V$  – групова швидкість. (Слід зазначити, що перехід від координат  $(x, t)$  до  $(\tau, \xi)$  має назву перетворення змінних Гарднера–Морікаві).

У (17) введені наступні позначення:

$$V = \frac{\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) \cdot \left[1 + 16 \cdot \left(\frac{C_1}{C_0}\right) \cdot \sin^4\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right]}{\sqrt{LC_0} \cdot \left[1 + 4 \cdot \left(\frac{C_1}{C_0}\right) \cdot \sin^2 \gamma\right]} = \frac{\partial \omega}{\partial \gamma};$$

$$N = \left\{ V^2 LC_0 - \cos \gamma + 4LC_1 \times \right. \\ \left. \times \left( V^2 \cdot \sin^2 \gamma + 2\omega V \sin 2\gamma + \omega^2 \cos 2\gamma \right) \right\} \times$$

$$\times \left\{ 2\omega LC_0 \cdot \left[1 + 4 \left(\frac{C_1}{C_0}\right) \cdot \sin^2 \gamma\right]^{\frac{3}{2}} \right\}^{-1} = -\frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{d\gamma^2};$$

$$P = \frac{\omega}{2 \cdot \left[1 + 4 \cdot \left(\frac{C_1}{C_0}\right) \sin^2 \gamma\right]} \cdot \left\{ \alpha_1^2 \cdot \left[ \frac{V^2 LC_0}{1 - V^2 LC_0} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2 LC_0}{\sin^2 \gamma - \omega^2 LC_0 \left[1 + 4 \left(\frac{C_1}{C_0}\right) \sin^2 \gamma\right]} \right] + \frac{2}{3} \alpha_2 \right\};$$

$$\omega = \frac{2 \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\sqrt{LC_0} \cdot \left[1 + 4 \left(\frac{C_1}{C_0}\right) \sin^2 \gamma\right]^{\frac{1}{2}}}; \quad (18)$$

Вид стационарних хвиль огинаючої визначається знаком добутку коефіцієнтів дисперсії  $N$  та нелінійності  $P$ : для  $PN > 0$  можливе формування звичайних («світлих») солітонів, для  $PN < 0$  – солітонів впадини («темних» солітонів) [11]. Аналіз (18) свідчить, що у залежності від несучої часом імпульсу у лінії існує ряд областей, котрі відрізняються знаком  $PN$ . Результати чисельного розрахунку для високочастотної ділянки дисперсійної кривої зображено на рис. 3.

Розглянемо, у першу чергу солітони огинаючої у лінії з чисто кубічною не лінійністю, маючи на увазі, зокрема, що «темні» солітони експериментально практично не спостерігались. Для компенсації квадратичної нелінійності у кожному комірці лінії було включено пару варікапів за зустрічно-паралельною схемою. Залежність  $Q(u)$  у цьому випадку має вид (4) при  $\alpha_l = 0$ . Якісно можна вважати, що лінія з такою нелінійністю моделює процеси на поверхні глибокої води.

Для формування солітонів огинаючої на вхід лінії подають модульовану напругу, яка за формою близька до стационарної хвилі. Утворення солітонів відбувається на перших 10...15

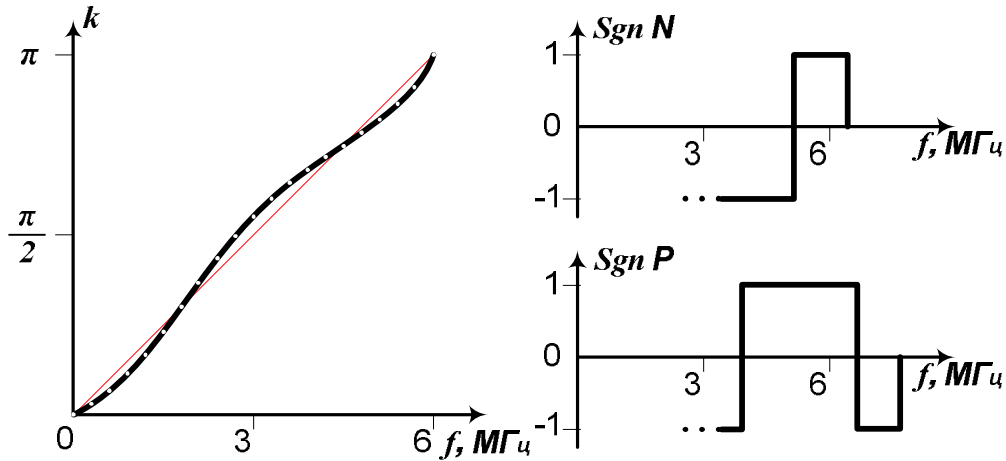


Рисунок 3 — Залежність знаків коефіцієнтів нелінійності і дисперсії  $N$  від частоти

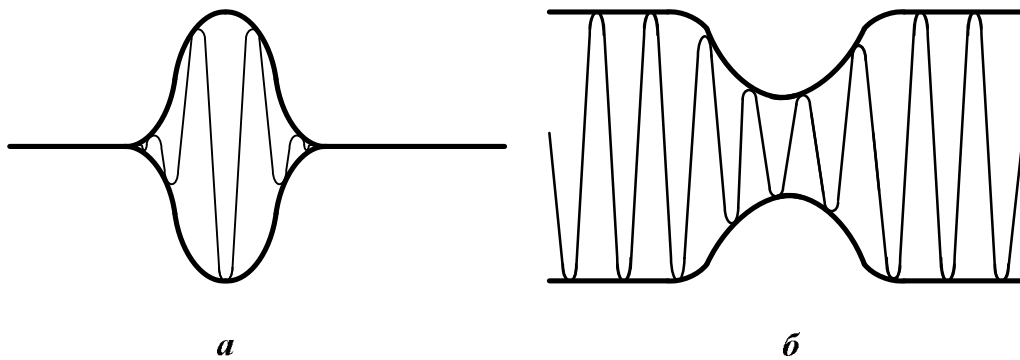


Рисунок 4 — Форма «світлого» (а) та «темного» (б) солітонів огинаючої в лінії з кубічною нелінійністю

комірках; потім вони дещо деформуються завдяки втратам у лінії в околі граничної частоти. Критерієм стаціонарності слугує відсутність частотної модуляції несучої частоти в середині радіоімпульсу (це можна зафіксувати візуально на екрані осцилографа при синхронізації модульованого сигналу несучою частотою).

Солітони пучності спостерігаються у лінії на частоті  $4\text{МГц} \leq f_0 \leq 5,2\text{МГц}$ , для котрих  $PN > 0$ . На рис.4,а наведено осцилограму солітона, який має тривалість  $\tau_c \approx 2$  мкс і форму, яка задовільно описується гіперболічним секансом:

$$\bar{A} = \bar{A}_0 \cdot \text{sech} \left( \bar{A}_0 \cdot \sqrt{\frac{N}{2}} \cdot P \cdot \xi \right), \quad (19)$$

де  $\bar{A}_0$  – реально виміряна амплітуда імпульсу. Наявність осцилюючих «хвостів» пояснюється, можливо, дисперсією більш високого порядку, яка не врахована при виведенні рівняння (17). У відповідності з відомими уявленнями швидкість «світлих» солітонів не залежала від їх амплітуди й приблизно дорівнювала груповій швидкості  $V$ , яка визначається з (18).

Для формування «темного» солітона на вхід лінії подавали гармонічну напругу з частотою  $f_0 \approx 6,4\text{МГц}$ , огинаюча котрого мала впадину, сформовану одним періодом синусоїдальної напруги з частотою  $1\text{МГц}$  [12]. Форма «темного» солітона описується наступним виразом [11]:

$$\bar{A} = \bar{A}_0^2 - (\bar{A}_0^2 - \bar{A}_1^2) \times \sec h^2 \left\{ \sqrt{\frac{-N(\bar{A}_0^2 - \bar{A}_1^2)}{2P}} \cdot [n - (V + W) \cdot t] \right\}, \quad (20)$$

де  $\bar{A}_1$  – значення напруги на «дні» солітона;  $\bar{A}_0$  – амплітуда його несучої;  $W$  – корекція до групової швидкості:

$$W = \sqrt{-2PN} \cdot \bar{A}_1. \quad (21)$$

Спостережувана (рис. 4, б) та розрахована форми «темного» солітона суттєво відрізняються, що зумовлено близькістю несучої частоти до границі смуги пропускання ( $f_{кр} \approx 6,8\text{МГц}$ ), де суттєву роль грають втрати і дисперсія, які не враховуються рівнянням (17). На рис. 5 представлено експериментальну залежність  $W \bar{A}_1$ . Корекція до швидкості  $W$  дійсно виявляється прямопропорційною  $\bar{A}_1$ , однак вимірний коефіцієнт пропорційності був вище розрахункового.

У відповідності з (20) швидкість «темного» солітона не залежить від амплітуди  $\bar{A}_0$ .

Відомо, що у наближенні глибокої води ( $kh \rightarrow \infty$ ) індукована хвилями середня течія перетворюється у нуль й одновимірне рівняння

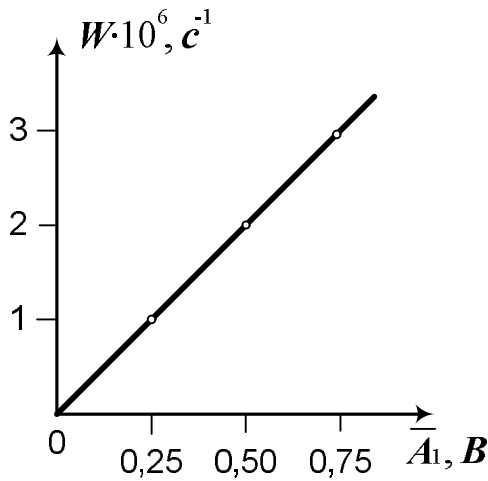


Рисунок 5 — Залежність  $W(\bar{A}_1)$

Шредінгера для комплексної амплітуди  $\bar{\eta}$  пакету поверхневих хвиль має вигляд аналогічний (17) [10]. Коефіцієнти цього рівняння тоді дорівнюють:

$$N = -\frac{\omega_0}{8\omega} \left( \frac{1 - 6\bar{T} - 3\bar{T}^2}{1 + \bar{T}} \right), \quad (22)$$

$$P = -\frac{\omega_0}{4\omega} \left( \frac{8 \pm \bar{T} \pm 2\bar{T}^2}{(1 - 2\bar{T})(1 + \bar{T})} \right),$$

де:  $\bar{T} = \frac{k^2 T}{g}$ ,  $\omega_0^2 = g \cdot k$ .

Для низьких частот ( $\omega_0 \leq 5$  Гц) у формулах (22) поверхневим натягом можна знехтувати. Оскільки добуток  $PN > 0$ , у цій області формується лише «світлі» солітони. Експериментальне спостереження таких солітонів у вузьких каналах, де можна було уникнути нестійкості імпульсів у відношенні до довгохвильових поперечних збурень, було описано у роботі [2].

Для більш високих частот вплив поверхневого натягу призводить до того, що знаки коефіцієнтів  $P$  і  $N$  стають, як і у лінії, залежними від  $k$ , тобто від частоти заповнення  $f_0$ . Аналіз формул (22) свідчить, що для частот  $f_0 < 8,2$  Гц  $P < 0$ , і  $N < 0$ ; для частот  $8,2$  Гц  $< f_0 < 11$  Гц  $N > 0$ ,  $P < 0$  і для частот  $f_0 > 11$  Гц,  $N > 0$ ,  $P > 0$ . Звідси випливає принципова можливість існування у діапазоні гравітаційно-капілярних хвиль як «світлих», так і «темних» солітонів.

Зазначимо, що експериментально на цих частотах солітони огинаючої поки що не спостерігались. Мабуть однією з головних перешкод є швидке затухання високочастотних хвиль.

#### 4. Солітони огинаючої у квадратично-кубічному середовищі

Для скінченної глибини вигляд коефіцієнтів  $P$  і  $N$  суттєво ускладнюється; крім того, виникає середня течія, обумовлена «квадратичним» детектуванням періодичних збурень [13]. Розподілення впливу квадратичної та кубічної не-

лінійностей у цьому випадку ускладнене, однак такий варіант розділення вдається провести для лінії. Моделлю середовища з квадратично-кубічною нелінійністю є лінія з супутньо-паралельним включенням варікапів у комірку ( $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 \neq 0$ , див.(4)).

Розглянемо детально вплив квадратичної нелінійності на фоні «традиційної» кубічної нелінійності рівняння Шредінгера. Вигляд коефіцієнта  $P$  (див. (18)) вказує на два механізми самовпливу за рахунок квадратичної нелінійності. Зміна огинаючої та фази відбувається, поперше, завдяки появі відеоімпульсу-п'єдесталу, обумовленого нелінійним детектуванням радіоімпульсу (перший член у квадратних скобках у виразі для  $P$ ), по-друге, за рахунок несинхронної генерації другої гармоніки (другий член у квадратних скобках). Повний співмножник при  $\alpha_1^2$  виявляється частотно-залежним, тому з'являються додаткові діапазони частот, у котрих можливе існування солітонів обох типів.

Для коректного спостереження солітонів у лінії з квадратично-кубічною нелінійністю необхідно знищити відеоімпульс, який з'являється на границі середовища, спектр кожного лежить у інтервалі частот від 0 до  $\Delta f$  ( $\Delta f$ -ширина спектру радіоімпульса).

Завдяки дисперсії лінії цей відеоімпульс спотворюється і відстає від солітона, однак на

довжинах  $l \leq \left| \frac{A_c \cdot V}{V - \left( \frac{d\omega}{dk} \right) \Big|_{\omega=0}} \right|$  ( $A_c$  – лінійний

розмір солітона) огинаюча має характерний (у нашому випадку осцилюючий) «хвіст» (рис. 6, а).

Для знищення цих спотворень на вхід лінії слід подавати компенсуючий відеоімпульс, сформований у результаті попереднього квадратичного детектування радіоімпульсу. Підібрані дослідним шляхом амплітуди компенсуючого імпульсу складають  $A_g \approx 0,05 \cdot \bar{A}_0^2$  для світлого солітона і  $A_g \approx 0,05 \cdot (\bar{A}_0 - \bar{A}_1)^2$  для темного. Осциляції компенсуються, якщо разом зі світлим солітоном подавати імпульс від'ємної полярності, а з темним – додатної (рис. 6, б). Після усунення вказаних спотворень стає зрозумілим, що солітони огинаючої несиметричні відносно рівня  $u = 0$ . Ця асиметрія зв'язана, як зазначалось вище, з відеоімпульсом, який супроводжує солітон. Його форма у відповідності з (18) визначається виразом:

$$A^{(2)} = \alpha_1 \cdot \frac{LC_0 V \cdot |\bar{A}|^2}{2 \cdot (1 - V^2 LC_0)}. \quad (23)$$

Ступінь вказаної асиметрії у залежності від величини амплітуди солітона складала 0,05...0,12 від  $\bar{A}_0$  або від  $(\bar{A}_0 - \bar{A}_1)$ , відповідно знак асиметрії виявляється різним для солітонів обох типів. Зазначимо, що у лінії з примусовим зміщенням діодів тільки модульована хвиля супроводжується випрямленим відеоімпульсом

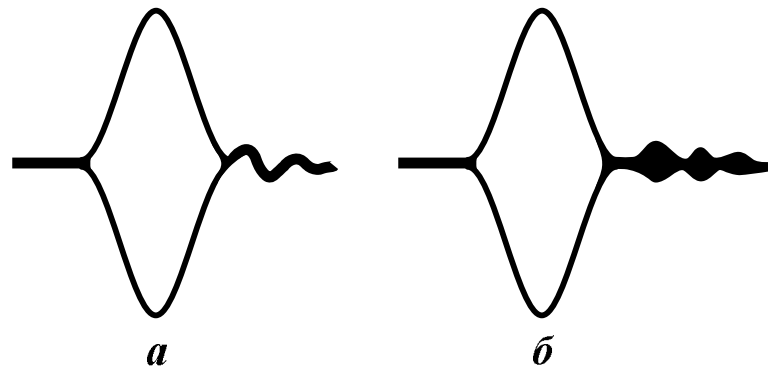


Рисунок 6 — Форма «світлого» солітона у лінії з квадратично-кубічною нелінійністю до (а) і після (б) компенсації

(для неперервного сигналу ефект квадратичного випрямлення за рахунок реактивної не лінійності дорівнює нулю). Для хвильового пакету поверхневих хвиль його асиметрія відносно середнього рівня означає виникнення локальної течії. Дослідження цього питання вимагає спеціального розгляду.

Крім того, врахування квадратичної нелінійності призводить до природної зміни коефіцієнта  $P$ . У нашому випадку має місце зменшення тривалості солітонів обох типів приблизно у 1.5 рази у порівнянні з солітонами, які спостерігаються у лінії з чисто кубічною нелінійністю.

### Висновки

Моделювання розповсюдження солітонів у електромагнітних лініях передачі дає змогу досліджувати тонкі нелінійні ефекти, які виникають у гідроприводах машин нафтогазового обладнання та будівельних машин.

Розглянуто і всебічно досліджено особливості притаманні поверхневим хвилям гравітаційно-капілярного діапазону, які зазвичай маскуються іншими хвильовими процесами на поверхні робочої рідини гідроприводів вказаних машин.

Отримані результати можуть слугувати у подальшому для уточнення й вдосконалення існуючих методів інженерного розрахунку подібних систем і оптимізації управління гідроприводів машин нафтогазового обладнання та будівельних машин.

### Література

- 1 Wright I.W. A new model for sea clutter // IEEE Transactions. Antennas and Propagation. – 1968. – Vol.AP-16. – №2. – P. 217-223.
- 2 Юэн Г. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде / Г. Юэн, Б. Лэйк – М., 1987. – 179 с.
- 3 Моделирование волн на поверхности жидкости с помощью электрической линии передачи радиодиапазона / [Воляк К.И., Горшков А.С., Марченко В.Ф., Стрельцов А.М.] – Препринт ИОФАН СССР. – М., 1986. – №329. – 20 с.

- 4 Островский Л.А. Уединенные электромагнитные волны в нелинейных линиях передачи / Островский Л.А., Пайко В.В., Пелиновский Е.Н. // Известия вузов. Радиофизика. – 1972. – Т.15. – №4. – С. 580-591.

- 5 Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана / Филлипс О.М. – Л.: Гидрометеоздат, 1980. – 319 с.

- 6 Островский Л.А. Ударные волны и солитоны. / Островский Л.А. // Известия вузов. Радиофизика. – 1976. – Т.19. – №5/6. – С.661-690.

- 7 Временная структура импульсов второй гармоники в нелинейной среде / [Белин А.М., Мартынова В.П., Марченко В.Ф., Щипакин С.Д.] // Вестник МГУ. Серия 3. Физика, астрономия. – 1975. – № 1. – С. 22-31.

- 8 Kawahara T. Oscillatory solitary wave in dispersive media / Kawahara T. // Journal of Physical Society of Japan. – 1972. – Vol.33. – P. 260-264.

- 9 Косицкий В.П. О гравитационно капиллярных солитонах на поверхности жидкости / Косицкий В.П. // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1982. – Т.18. – №2. – С.202-206.

- 10 Абловиц М. Солитоны и метод обратной задачи / М. Абловиц, Х. Сегур. – М.: Мир, 1987. – 479 с.

- 11 Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / Карпман В.И. – М.: Наука, 1973. – 176 с.

- 12 Воляк К.И. Моделирование квазистационарных волн огибающей в линии передачи с варикапами / К.И., Марченко В.Ф., Стрельцов А.М. // Краткие сообщения по физике. – 1987. – №4. – С.33-35.

- 13 Езерский А.Б. Лабораторное исследование крупномасштабных течений, индуцированных пакетом поверхностных волн / А. Езерский, В. Папко // Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана. – 1986. – Т.22. – №9. – С.979-986.

Стаття поступила в редакційну колегію  
5.03.09

Рекомендована до друку професором  
**Вольченко О.І.**