

УДК 514.862

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ДЕФОРМУВАННЯ ТА НАПРУЖЕНОГО СТАНУ РЕЗЕРВУАРІВ СФЕРИЧНОГО ТИПУ**Б. С. Незамай*, В. В. Бачук***Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;**76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;**тел. +380 (342) 72-38-24; mmi@nung.edu.ua*

Розроблено математичну модель процесу деформування сталевих резервуарів сферичної конфігурації з використанням даних про переміщення точок їх поверхні. Визначено компоненти тензора напружень. Створено методіку побудови функції переміщень на основі мінімізації нев'язок рівнянь рівноваги та граничних умов. Визначено напрямки подальших досліджень. Ключові слова: резервуари сферичного типу, математичне моделювання процесу деформування

Разработана математическая модель процесса деформирования стальных резервуаров сферической конфигурации с использованием данных о перемещении точек их поверхности. Определены компоненты тензора напряжений. Создана методика построения функции перемещений на основе минимизации невязок уравнений равновесия и краевых условий. Определены направления дальнейших исследований. Ключевые слова: резервуары сферического типа, математическое моделирование процесса деформирования

The steeltank with spherical configuration deformation process mathematical model has been designed using the information about one's surface points displacements. The stress tensor six components have been defined. The method of displacements function of construction has been given based on the residual equilibrium equations and boundary conditions defects minimization. The direction of the future investigation has been defined.

При дослідженні технічного стану сталевих резервуарів сферичного типу враховуються такі фактори, як тривалість експлуатації, її режими, геокліматичні умови, та інші фактори силивого впливу на конструкції такого типу. Як правило, основними факторами, що обумовлюють зміну технічного, і, зокрема, напружено-деформованого стану, є дія непроектованих навантажень та корозія матеріалу. Основною інформацією, яка використовується при оцінці зміни напружено-деформованого стану, є дані про переміщення точок поверхні резервуару, визначені одним з експериментальних методів [1, 3]. Для оцінки напружено-деформованого стану резервуарів за даними про переміщення певної множини точок доцільно використовувати підхід, розроблений та теоретично обґрунтований в роботах [4, 5], оскільки існуючі

методи розрахунку параметрів напружено-деформованого стану враховують лише окремі види навантажень – наприклад, внутрішній тиск [6], проте ці підходи не дозволяють описати напружено-деформований стан у повному вигляді – визначити шість компонентів тензорів деформацій та напружень – тобто одержати і зсувні напруження. Тому проблема створення нових уточнених моделей процесу деформування та напруженого стану газгольдерів сферичного типу залишається актуальною науково-технічною задачею.

1 Математична модель процесу деформування

Сталевий резервуар сферичного типу з геометричної точки зору моделюється сферою (рисунок 1), що обумовлює використання сферичної системи координат.

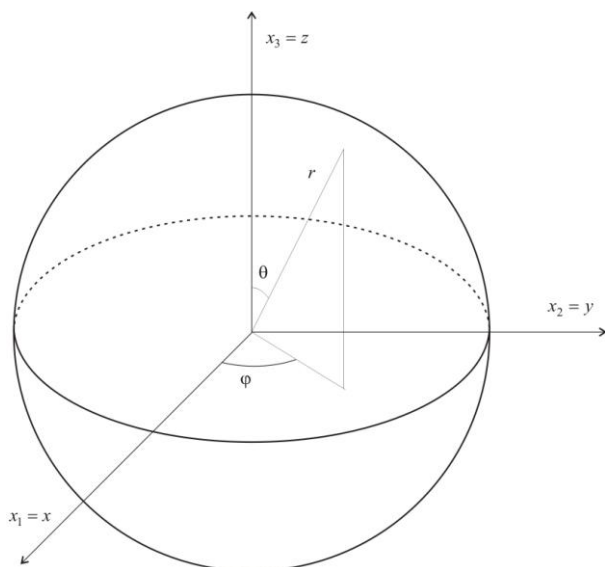


Рисунок 1 – Система координат для моделювання деформування та напруженого стану сферичних газгольдерів

На рисунку 1: $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $R_1 \leq r \leq R_2$. Тут r – радіальна координата, R_1, R_2 – внутрішній та зовнішній радіуси резервуару, θ і φ відповідні кути. Координати вводяться наступним чином: $\alpha^1 = r$, $\alpha^2 = \theta$, $\alpha^3 = \varphi$. Для координат точок резервуару справедливе наступне подання:

$$\vec{r} = \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (1)$$

За формулами (1) обчислюються компоненти локальних базисів в кожній точці резервуару [8]:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha^i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

за знайденими компонентами векторів (2) знаходяться компоненти метричного тензора :

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j, \quad (3)$$

а за формулами (3) – символи Кристофеля другого роду для виконання операції коваріантного диференціювання, які для сферичної системи координат (недеформована сфера) записуються у вигляді:

$$\begin{cases} g_{11} = 1, \\ g_{22} = r^2, \\ g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \\ g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 = -r, \\ \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{32}^3 = \text{ctg} \theta. \end{cases} \quad (5)$$

Таким чином, формули (1) – (5) повністю описують геометрію резервуару в недеформованому (початковому) стані. Для моделювання процесу деформування резервуару необхідно описати геометрію резервуару в деякий контрольний момент часу.

Для деформованого стану резервуару його геометрія описується наступним чином:

$$\vec{r} = \begin{cases} x = \mathcal{C} + f(\varphi; \varphi) \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \mathcal{C} + f(\varphi; \varphi) \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \mathcal{C} + f(\varphi; \varphi) \cos \theta, \end{cases} \quad (6)$$

де межі зміни координат аналогічні (1).

Подання (6) записується в допущенні про те, що:

а) об'єкт (сталевий резервуар сферичної форми) є тонкостінним – товщина стінки суттєво менша за інші лінійні розміри;

б) функція $f(\varphi; \varphi)$ задає переміщення точок в напрямку радіусу резервуару, і вона може бути визначена експериментально. Вважається, що ця функція мало змінюється по радіусу, тому $f(\varphi; \varphi)$ не залежить від координати r . Більш загальним поданням (6) могло б бути подання, в якому $\theta = \theta_1 = \theta_1(\varphi, \theta); \varphi = \varphi_1 = \varphi_1(\varphi, \theta)$, проте, вказані функції складно формалізувати.

Обчислюючи компоненти векторів \vec{e}_i за формулою (2) з використанням подання (6) для деформованого резервуару та компонент метричного тензора за (3) з урахуванням (6) одержуються шість компонент метричного тензора:

$$\begin{cases} \tilde{g}_{11} = 1, \\ \tilde{g}_{22} = f_{\theta}^{\prime 2} + \mathbf{C} + f_{\theta}^{\prime 2}, \\ \tilde{g}_{33} = f_{\varphi}^{\prime 2} + \mathbf{C} + f_{\varphi}^{\prime 2} \sin^2 \theta, \\ \tilde{g}_{12} = f_{\theta}^{\prime}, \\ \tilde{g}_{13} = f_{\varphi}^{\prime}, \\ \tilde{g}_{23} = f_{\theta}^{\prime} \cdot f_{\varphi}^{\prime}. \end{cases} \quad (7)$$

Тут символи f_{θ}^{\prime} та f_{φ}^{\prime} позначають частинну похідну функції f по координатах θ і φ відповідно. Вважається, що деформації резервуара є такими, що загальна конфігурація після деформування залишається близькою до сферичної (квазісферичною), що дозволяє для подальших обчислень використовувати символи Крістофеля II-го роду, обчислені за (5), для недеформованої сфери. За відомою функцією $f(\theta, \varphi)$ компоненти тензора деформації обчислюються за формулами:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{g}_{ij} - g_{ij}^0) \quad (8)$$

де \tilde{g}_{ij} обчислюється за (7), а g_{ij}^0 – за формулами (4), компоненти тензора ε_{ij} мають вигляд:

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = 0, \\ \varepsilon_{22} = \frac{1}{2} (f_{\theta}^{\prime 2} + 2rf + f^2), \\ \varepsilon_{33} = \frac{1}{2} (f_{\varphi}^{\prime 2} + 2rf \sin^2 \theta + f^2 \sin^2 \theta), \\ \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} f_{\theta}^{\prime}, \\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2} f_{\varphi}^{\prime}, \\ \varepsilon_{23} = \frac{1}{2} f_{\theta}^{\prime} \cdot f_{\varphi}^{\prime}. \end{cases} \quad (9)$$

Компоненти тензора напружень для моделі ізотропного пружного тіла записуються у вигляді:

$$\sigma^{ij} = \lambda I_1 \mathbf{C} \tilde{g}_{ij}^0 + 2\mu \varepsilon^{ij}, \quad (10)$$

де λ, μ – параметри Ламе матеріалу, з якого виготовлено резервуар;

$\sigma^{ij}, \varepsilon^{ij}$ – контраваріантні компоненти тензорів напружень та деформацій;

g_{ij}^0 – контраваріантні компоненти метричного тензора (4), фактично, це компоненти матриці, оберненої до (4);

$I_1 \mathbf{C}$ – перший інваріант тензора деформацій:

$$I_1 \mathbf{C} = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} g_{ij}^0. \quad (11)$$

З урахуванням всіх наведених результатів залежність (11) набуває вигляду:

$$I_1 \mathbf{C} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{f_{\theta}^{\prime 2}}{2} + 2rf + f^2 \right) + \frac{1}{2r^2 \sin^2 \theta} f_{\varphi}^{\prime 2}. \quad (12)$$

Для ε^{ij} відомою є формула [7]:

$$\varepsilon^{ij} = \sum_{s,k=1}^3 \varepsilon_{sk} g_{si}^0 g_{kj}^0, \quad (13)$$

а, отже, (13) в даному випадку має вид:

$$\begin{cases} \varepsilon^{11} = \varepsilon_{11} g_{11}^0 g_{11}^0, \\ \varepsilon^{22} = \varepsilon_{22} g_{22}^0 g_{22}^0, \\ \varepsilon^{33} = \varepsilon_{33} g_{33}^0 g_{33}^0, \\ \varepsilon^{12} = \varepsilon_{12} g_{11}^0 g_{22}^0, \\ \varepsilon^{13} = \varepsilon_{13} g_{11}^0 g_{33}^0, \\ \varepsilon^{33} = \varepsilon_{23} g_{22}^0 g_{33}^0. \end{cases} \quad (14)$$

Для компонент тензора напружень з урахуванням (8) – (14) одержується:

$$\begin{cases} \sigma^{ss} = \lambda I_1 \mathbf{C} g_{ss}^0 + 2\mu \varepsilon^{ss}, \quad s = 1, 2, 3; \\ \sigma^{st} = 2\mu \varepsilon^{st}, \quad s, t = 1, 2, 3, s \neq t. \end{cases} \quad (15)$$

Методика (1) – (15) дозволяє оцінити компоненти тензора напружень, за умови, якщо функція $f(\theta, \varphi)$ є визначеною, і у дослідника не виникає сумнівів стосовно точності її задання. Тоді пораховані компоненти тензора напружень можуть бути використані для оцінки технічного стану резервуару. Проте в багатьох випадках функція $f(\theta, \varphi)$ визначається як таблиця значень виду $\mathbf{C}_i, \varphi_i, f_i$, $i = 1, \dots, k$, де k – кількість точок, в яких проводиться вимірювання переміщень f_i , або у вигляді точок з координатами $\mathbf{C}_i, \varphi_i, f_{ij}$. В такому випадку можна застосувати наступну методику визначення $f(\theta, \varphi)$. Функція $f(\theta, \varphi)$ подається у вигляді:

$$f(\theta, \varphi) = \sum C_{ij} \theta^i \varphi^j, \quad (16)$$

або, в більш загальному випадку:

$$f(\theta, \varphi) = \sum C_{ij} F_{ij}(\theta, \varphi), \quad (17)$$

де F_{ij} – деякі відомі базисні функції. Записуючи рівняння рівноваги:

$$\sum_{j=1}^3 \nabla_j \sigma^{ij} = 0, \quad i=1,2,3, \quad (18)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma^{11}}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \sigma^{13}}{\partial \alpha^3} + \sigma^{22} \Gamma_{22}^1 + \sigma^{11} \Gamma_{12}^2 + \sigma^{33} \Gamma_{33}^1 + \sigma^{11} \Gamma_{13}^3 + \sigma^{12} \Gamma_{23}^3 = 0, \\ \frac{\partial \sigma^{12}}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial \sigma^{22}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \sigma^{23}}{\partial \alpha^3} + 3\sigma^{21} \Gamma_{12}^2 + \sigma^{33} \Gamma_{33}^2 + \sigma^{12} \Gamma_{13}^3 + \sigma^{22} \Gamma_{22}^3 = 0, \\ \frac{\partial \sigma^{31}}{\partial \alpha^1} + \frac{\partial \sigma^{32}}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial \sigma^{33}}{\partial \alpha^3} + 3\sigma^{13} \Gamma_{13}^3 + 3\sigma^{23} \Gamma_{23}^3 + \sigma^{13} \Gamma_{12}^2 = 0. \end{cases} \quad (19)$$

Позначаючи нев'язки трьох рівнянь системи (19), які одержуються шляхом підстановки (16) або (17) у відповідні формули (6) – (15), будувється наступна функція багатьох змінних:

$$Q(\theta, \varphi, C_{ij}, \lambda_k) = \sum_{m=1}^3 \lambda_m \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^L R_{in}^2(\theta, \varphi, C_{ij}) + \lambda_4 \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^L (f_{ij} - f(\theta, \varphi, C_{ij}))^2 \quad (20)$$

Коефіцієнти $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ – це вагові коефіцієнти, які дозволяють враховувати пріоритетність тих чи інших доданків у (20), коефіцієнти C_{ij} є невідомими, їх підбирають таким чином, щоб мінімізувати (20):

$$C_{ij}^* = \arg \min_{C_{ij}} Q(\theta, \varphi, C_{ij}, \lambda_k). \quad (21)$$

Функція (20) є додатньо визначеною квадратичною формою від C_{ij} , тому, з урахуванням умов $\lambda_i > 0, i=1,2,3,4$ вказаний мінімум існує. Знайшовши цей мінімум та підставивши C_{ij}^* в (16) або (17) за відомою $f(\theta, \varphi)$ проводяться обчислення компонент тензора напружень, на підставі яких робляться висновки стосовно напруженого стану резервуару.

Напрямки подальшого дослідження можуть бути пов'язані з вирішенням наступних завдань:

- визначення параметрів геометрії резервуару та зміни фізико-механічних властивостей матеріалу, з якого виготовлено резервуар, в процесі його експлуатації;
- розробка методики визначення значень f_{ij} переміщень в контрольних точках.

1. Ключев В. В. *Неразрушающий контроль и диагностика*/ В. В. Ключев и др. – М.: Машиностроение, 2003 – 658с. 2. *Неруйнівний контроль. Ультразвуковий контроль. Ч. 1.*

де $\sum \nabla_j \sigma^{ij}$ – сума коваріантних похідних компонентів тензора напружень, з урахуванням (1) – (15) можна записати у вигляді:

*Загальні вимоги (EN 583 – 1:1996) ДСТУ EN 583-1-2001 – К.: УТНКТД, 2003 – НСУ. 3. Горицкий В. М. *Техническое диагностирование стальных сварных резервуаров с использованием УЗК и метода магнитной памяти металла*/ В. М. Горицкий, В. В. Гречишкин// *Безопасность труда в промышленности*. – 2000 – №2 – С. 41 – 43. 4. Олійник А. П. *Математичні моделі процесу квазі-стаціонарного деформування трубо-провідних та промислових систем при зміні їх просторової конфігурації*. Наукове видання. / А. П. Олійник – Івано-Франківськ, ІФНТУНГ, 2010 – 320с. 5. Заміховський Л. М. *Метод та система контролю зміни напружено-деформованого стану матеріалу стінок вертикальних сталевих циліндричних резервуарів*. Наукове видання / Л. М. Заміховський, Х. В. Паньків, Ю. В. Паньків – Івано-Франківськ, ІФНТУНГ, 2015р. – 168с. 6. Можаровский М. С. *Теория пружности, пластичности и ползучести*. / М. С. Можаровский. – К.: Вища школа, 2002 – 308с. 8. Седов Л. И. *Механика сплошных сред* / Л. И. Седов – М.: Наука, 1984 – т. 2 – 577с.*

Поступила в редакцію 28.11.2016 р.

Рекомендували до друку: докт.техн.наук, проф. Райтер П.М., докт. техн. наук, проф. Олійник А.П.