УДК 389.14:543.271.08:511.2

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ГАЗОДИНАМІЧНИХ ДРОСЕЛЬНИХ ЗМІШУВАЧІВ

© Теплюх З. М., Леськів Г., 2000
Національний університет "Львівська політехніка"

Розроблено основи математичного опису газодинамічних дросельних змішувачів, побудованих на базі дроселів з рівними лінійними газодинамічними опорами, а також вирішена задача знаходження кількості різних газових сумішей при відомих кількостях дросельних елементів в каналах компонентів із використанням теорії чисел.

В багатьох сферах діяльності суспільства необхідні газові суміші із заданим складом. Так, зокрема, залишається актуальною проблема метрологічного забезпечення аналітичної апаратури, особливо у зв'язку з необхідністю фактично необмеженої номенклатури перевірювальних газових сумішей. Одним із найбільш перспективних методів приготування таких сумішей є неперервне змішування газових потоків, що дозуються з допомогою дросельних елементів з рівними лінійними газодинамічними опорами [1, 2, 3].

При розробці вищевказаних змішувачів постають задачі визначення потрібної кількості залучених дроселів у каналах кожного компоненту для отримання заданого складу газової суміші, знаходження кількості різних газових сумішей, які можна отримати при наявності в каналі кожного компоненту певної кількості дросельних елементів тощо [4]. Особливо актуальними є такі задачі для багатокомпонентних сумішей (наприклад, коли кількість компонентів більше чотирьох), а також для сумішей з малими концентраціями компонентів (наприклад, порядку 0,01%). Перебір всіх варіантів залучень дроселів в таких випадках вимагає значних затрат ресурсів (наприклад, для п'ятикомпонентної суміші при наявності в кожному каналі 7-ми дроселів комп'ютер Pentium100 виконує перебір до 25 хв.). В той же час актуальною є задача синтезу газової суміші з більшою кількістю компонентів при концентраціях окремих з них менше 0,01%. Так, наприклад, синтетичний "природний газ" може включати 10 компонентів з концентраціями в інтервалі 0,001…99,6%. В подібних випадках в каналах окремих компонентів має бути передбачена можливість залучення такої кількості рівних за опорами дроселів, щоб сумарні газодинамічні опори в окремих каналах відрізнялися кількома порядками, що вимагає наявності в окремих каналах сотень дроселів. Тому для побудови і оптимізації схем дросельних змішувачів необхідний їх математичний опис.

Аналіз вищевказаних задач показує, що для їх розв'язання необхідно застосовувати теорію чисел [5], зокрема, властивості взаємно простих чисел. Так, наприклад, різні газові суміші можна отримати лише в тому випадку, коли в каналах кожного компоненту залучені кількості дроселів представляють собою взаємно прості числа.

Для математичного опису розглядуваного змішувача, що містить n каналів компонентів, в кожному з яких знаходиться своя кількість $M_i \ (i=\overline{1,n})$ дроселів, доцільно ввести наступні поняття:

$\overline{M}_i = \{1,2,3,...,M_i\}$ – вектор, який складений з елементів (чисел), що визначають можливу кількість залучених дроселів в каналі i-го елементу;

$m_i = \overline{0,M_i}$ – кількість залучених дросельних елементів в каналі i-го компоненту.

Склади газових сумішей (вектори концентрацій r_i), які можна отримати для заданого змішувача, визначаються векторами $\overline{W}_k = [m_1, m_2,...,m_n]$, $k=\overline{1,K}$, де $K=\prod_{i=1}^{n} M_i$ - кількість всіх можливих газових сумішей.

Отже склад генерованої газової суміші (вектор концентрацій r_i компонентів) для конкретних залучень дроселів можна визначити із залежності

$$r_i = m_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i \,, \qquad (1)$$

де r_i – концентрація i-го компоненту в газовій суміші.

Частина сумішей серед K можливих повторюється, а решта C сумішей є різними (неповторювані) [4]. Умова неповторюваної суміші може бути сформульована так: елементи вектора $\overline{W}_k$ (числа вибрані з векторів $\overline{M}_i$) складають взаємно прості числа.

Отже задача визначення кількості різних газових сумішей для заданого змішувача зводиться до наступного. Необхідно знайти кількість С векторів $\overline{W}_k$, елементи яких складають взаємно прості числа, кожне з яких вибране із заданих векторів $\overline{M}_i$ наступним чином: перший елемент вектора $\overline{W}_k$ є елементом вектора $\overline{M}_1$, другий - елементом вектора $\overline{M}_2$, n-ий - елементом вектора $\overline{M}_n$.

В [5] наведена задача, яка є подібною до описаної вище, а саме: знайти кількість $Ф(x, y)$ чисел, кожне з яких не більше x і не ділиться на прості числа, кожне з яких не більше y, або інакше - це кількість чисел, кожне з яких не більше x і взаємно просте з $[y]!$,

де $[y]! = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ - канонічний розклад числа y; $p_1, p_2, ..., p_r$ - прості числа, кожне з яких не більше y; r – порядковий номер останнього простого числа у його канонічному розкладі; α_i - натуральні числа.

Розв'язком даної задачі є формула

$$Ц(x, y) = \sum_{d|A\le y}\left[\frac{x}{d}\right]\cdot м(d), \qquad (2)$$

де x, y – натуральні числа; A – число, що є добутком простих чисел, тобто $A=p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$; d – дільники числа A (позначення: $d|A$), тобто $d \in [1,\ p_j,\ p_j \cdot p_s,\ p_j \cdot p_s \cdot p_t,\ \ldots]$, наприклад, число A=30 розкладається на прості множники p_1=2, p_2=3, p_3=5 і при цьому отримуємо $d \in [1, 2, 3, 5, 2\cdot3, 2\cdot5, 3\cdot5, 2\cdot3\cdot5]$; $p_j \cdot p_s \cdot p_t$ – прості числа; $\left[\frac{x}{d}\right]$ – ціла частина числа $\frac{x}{d}$; $\mu(d)$ – функція Мебіуса, числова функція, що визначена умовами:

$\mu(1)=1$;
$\mu(d)=(-1)^r$, якщо $d= p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$; (3)
$\mu(d)=0$, якщо $p^2|d$, тобто, якщо в канонічний розклад d входить хоча б один простий множник в степені більшій, ніж 1,

наприклад: $\mu(77)=\mu(7\cdot11)=1$, $\mu(105)=\mu(3\cdot5\cdot7)=-1$, $\mu(90)=\mu(2\cdot3^2\cdot7)=0$.

Приклад застосування формули (2).

Знайти кількість чисел серед 1250 натуральних чисел, що не діляться на прості числа, які менші або рівні 10.

Маємо наступні прості числа, які менші або рівні 10: p=[2,3,5,7].

Знаходимо A=2·3·5·7=210,
$d \in$ [1, 2, 3, 5, 7, 2·3, 2·5, 2·7, 3·5, 3·7, 5·7, 2·3·5, 2·3·7, 2·5·7, 3·5·7, 2·3·5·7].

Згідно з формулою (2)

$$Ф(1250,10) = \sum_{d|210}\left[\frac{1250}{d}\right]\cdot м(d) = \left[\frac{1250}{1}\right]\cdot м(1) +$$
$$+\left[\frac{1250}{2}\right]\cdot м(2) + \left[\frac{1250}{3}\right]\cdot м(3) + \left[\frac{1250}{5}\right]\cdot м(5) +$$
$$+\left[\frac{1250}{7}\right]\cdot м(7) + \left[\frac{1250}{2\cdot3}\right]\cdot м(2\cdot3) + \left[\frac{1250}{2\cdot5}\right]\cdot м(2\cdot5) +$$
$$+\left[\frac{1250}{2\cdot7}\right]\cdot м(2\cdot7) + \left[\frac{1250}{3\cdot5}\right]\cdot м(3\cdot5) + \left[\frac{1250}{3\cdot7}\right]\cdot м(3\cdot7) +$$
$$+\left[\frac{1250}{5\cdot7}\right]\cdot м(5\cdot7) + \left[\frac{1250}{2\cdot3\cdot5}\right]\cdot м(2\cdot3\cdot5) +$$
$$+\left[\frac{1250}{2\cdot3\cdot7}\right]\cdot м(2\cdot3\cdot7) + \left[\frac{1250}{2\cdot5\cdot7}\right]\cdot м(2\cdot5\cdot7) +$$
$$+\left[\frac{1250}{3\cdot5\cdot7}\right]\cdot м(3\cdot5\cdot7) + \left[\frac{1250}{2\cdot3\cdot5\cdot7}\right]\cdot м(2\cdot3\cdot5\cdot7) = 286.$$

На основі формули (2) запропонована така формула для обчислення кількості $C(M_1,M_2)$ векторів $\overline{W}_k$ довжиною 2 (пар взаємно простих чисел), вибраних із векторів $\overline{M}_1, \overline{M}_2$:

$$C(M_1,M_2) = \sum_{(d|A)\le B}\left\{\left[\frac{M_1}{d}\right]*\left[\frac{M_2}{d}\right]*\mu(d)\right\}, \qquad (4)$$

де A – число, що можна записати у вигляді: $A= p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$, де $p_j \le B$ - прості числа; B – число, менше з двох заданих M_1 і M_2, тобто $B= min(M_1,M_2)$; $(d|A)\le B$ – запис, який означає що мають бути вибрані дільники числа A, менші або рівні числу B.

Слід відзначити особливу роль числової функції Мебіуса у формулі (4), яка завдяки своїм властивостям враховує набори, які не представляють собою взаємно простих чисел. Так, записуючи формулу (4) в розгорнутому вигляді отримуємо, що:

$$\left.\begin{aligned} C(M_1,M_2) = M_1 * M_2 - \sum_{(p_j|A)\le B}\left[\frac{M_1}{p_j}\right]\cdot\left[\frac{M_2}{p_j}\right] + \\ + \sum_{(p_j*p_s|A)\le B}\left[\frac{M_1}{p_j*p_s}\right]\cdot\left[\frac{M_2}{p_j*p_s}\right] - \\ - \sum_{(p_j*p_s*p_t|A)\le B}\left[\frac{M_1}{p_j*p_s*p_t}\right]\cdot\left[\frac{M_2}{p_j*p_s*p_t}\right] + \ldots \end{aligned}\right\} (5)$$

Тобто підрахунок векторів взаємно простих чисел у формулі здійснюється наступним чином: обчислюється кількість $(M_1 \cdot M_2)$ всіх можливих векторів довжиною 2, від якої віднімаються імовірні повтори та додаються невраховані вектори. При цьому знак кожної складової визначає числова функція Мебіуса згідно з умовами (3).

Нижче наведено два приклади застосування формули (4).

Приклад 1.

Нехай M_1=3, M_2=4.

Перебираючи всі можливі вектори довжиною

2, які сформовані із початкових векторів $\overline{M}_1 = [1\ \ 2\ \ 3]$, $\overline{M}_2 = [1\ \ 2\ \ 3\ \ 4]$ та вибираючи із них ті, що містять взаємно прості числа, отримуємо: $\overline{W}_1 = [1\ \ 1]$, $\overline{W}_2 = [1\ \ 2]$, $\overline{W}_3 = [1\ \ 3]$, $\overline{W}_4 = [1\ \ 4]$, $\overline{W}_5 = [2\ \ 1]$, $\overline{W}_6 = [2\ \ 3]$, $\overline{W}_7 = [3\ \ 1]$, $\overline{W}_8 = [3\ \ 2]$, $\overline{W}_9 = [3\ \ 4]$. Тобто кількість векторів $\overline{W}_k$, складених із взаємно простих чисел, C=9.

Використовуючи формулу (4) для знаходження кількості C векторів взаємно простих чисел можна уникнути перебору всіх можливих варіантів. Знаходимо $B=min(3,4)=3$, p=[2,3], A=2·3=6, d=[1, 2, 3, 2·3]. Отже:

$$C(3,4) = \sum_{(d|6)\le 3}\left[\frac{3}{d}\right]\cdot\left[\frac{4}{d}\right]\cdot \mu(d) = \left[\frac{3}{1}\right]\cdot\left[\frac{4}{1}\right]\times$$

$$\times\, \mu(1) + \left[\frac{3}{2}\right]\cdot\left[\frac{4}{2}\right]\cdot \mu(2) + \left[\frac{3}{3}\right]\cdot\left[\frac{4}{3}\right]\cdot \mu(3) = 9.$$

Приклад 2.

Нехай M_1=7, M_2=10 , тобто початкові вектори мають наступний вигляд

$$\overline{M}_1 = [1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7],$$

$$\overline{M}_2 = [1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10].$$

Знаходимо $B=min(7,10)=7$, отже p=[2,3,5,7], A=2·3·5·7=210, d=[1, 2, 3, 5, 7, 2·3, 2·5 ,2·7…].

Згідно з формулою (4) записуємо, що

$$C(7,10) = \sum_{(d|210)\le 7}\left[\frac{7}{d}\right]\cdot\left[\frac{10}{d}\right]\cdot \mu(d) = \left[\frac{7}{1}\right]\cdot\left[\frac{10}{1}\right]\cdot \mu(1) +$$

$$+\left[\frac{7}{2}\right]\cdot\left[\frac{10}{2}\right]\cdot \mu(2) + \left[\frac{7}{3}\right]\cdot\left[\frac{10}{3}\right]\cdot \mu(1) + \left[\frac{7}{5}\right]\cdot\left[\frac{10}{5}\right]\cdot \mu(5) +$$

$$+\left[\frac{7}{7}\right]\cdot\left[\frac{10}{7}\right]\cdot \mu(7) + \left[\frac{7}{2\cdot 3}\right]\cdot\left[\frac{10}{2\cdot 3}\right]\cdot \mu(2\cdot 3) = 47.$$

Із збільшенням кількості початкових векторів $\overline{M}_i$ та із збільшенням значень M_i перебір всіх можливих варіантів стає більш громіздким. Тому необхідність у формулі для обчислення кількості C векторів $\overline{W}_k$ довжиною $n\ge 3$ є ще актуальнішою. Аналогічно до формули (4) нами отримана формула для обчислення кількості $C(M_1,M_2,M_3)$ векторів $\overline{W}_k$ довжиною 3 (тріад взаємно простих чисел), вибраних із векторів $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3$ у вигляді

$$C(M_1,M_2,M_3) = \sum_{(d|A)\le B}\left\{\left[\frac{M_1}{d}\right]\cdot\left[\frac{M_2}{d}\right]\cdot\left[\frac{M_3}{d}\right]\cdot \mu(d)\right\}. \qquad (6)$$

Приклад застосування формули (6).

Нехай M_1=6, M_2=6, M_3=6.

Знаходимо $B=min(6,6,6)=6$, отже p=[2,3,5], A=2·3·5=30, d=[1, 2, 3, 5, 2·3, 2·5,…].

Згідно з формулою (6) записуємо

$$C(6,6,6) = \sum_{(d|30)\le 6}\left[\frac{6}{d}\right]\cdot\left[\frac{6}{d}\right]\cdot\left[\frac{6}{d}\right]\cdot \mu(d) =$$

$$=\left[\frac{6}{1}\right]\cdot\left[\frac{6}{1}\right]\cdot\left[\frac{6}{1}\right]\cdot \mu(1) + \left[\frac{6}{2}\right]\cdot\left[\frac{6}{2}\right]\cdot\left[\frac{6}{2}\right]\cdot \mu(2) +$$

$$+\left[\frac{6}{3}\right]\cdot\left[\frac{6}{3}\right]\cdot\left[\frac{6}{3}\right]\cdot \mu(3) + \left[\frac{6}{5}\right]\cdot\left[\frac{6}{5}\right]\cdot\left[\frac{6}{5}\right]\cdot \mu(5) +$$

$$+\left[\frac{6}{2\cdot 3}\right]\cdot\left[\frac{6}{2\cdot 3}\right]\cdot\left[\frac{6}{2\cdot 3}\right]\cdot \mu(2\cdot 3) = 181.$$

Для обчислення кількості $C(M_1,\ldots ,M_n)$ векторів $\overline{W}_k$ довжиною n (наборів взаємно простих чисел), вибраних з довільної кількості векторів $\overline{M}_1,\ldots,\overline{M}_n$, запропонована наступна формула:

$$\left.\begin{aligned}
&C(M_1,\ldots,M_n) = \sum_{(d|A)\le B}\left\{\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{M_i}{d}\right]\cdot \mu(d)\right\} = \\
&= M_1\cdot M_2\cdot\ldots\cdot M_n - \sum_{(p_j|A)\le B}\left[\frac{M_1}{p_j}\right]\cdot\left[\frac{M_2}{p_j}\right]\cdot\ldots\cdot\left[\frac{M_n}{p_j}\right] + \\
&+ \sum_{(p_j\cdot p_{sj}|A)\le B}\left[\frac{M_1}{p_j\cdot p_s}\right]\cdot\left[\frac{M_2}{p_j\cdot p_s}\right]\cdot\ldots\cdot\left[\frac{M_n}{p_j\cdot p_s}\right] - \\
&- \sum_{(p_j\cdot p_s\cdot p_t|A)\le B}\left[\frac{M_1}{p_j\cdot p_s\cdot p_t}\right]\cdot\left[\frac{M_2}{p_j\cdot p_s\cdot p_t}\right]\cdot\ldots\cdot\left[\frac{M_n}{p_j\cdot p_s\cdot p_t}\right] + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Враховуючи громіздкий розрахунок, який передбачає формула (7), особливо для великих значень n та $\overline{M}_i$, за даною формулою було розроблено алгоритм та програму його реалізації.

Аналіз наведених вище прикладів показує, що формула (7) дозволяє швидко і ефективно знаходити лише кількість C векторів взаємно простих чисел, не даючи при цьому ніякої інформації про самі вектори $\overline{W}_k$. Задача знаходження векторів $\overline{W}_k$ взаємно простих чисел, а тим самим і векторів неповторюваних концентрацій, може бути вирішена, наприклад з допомогою алгоритму Евкліда [5].

Приклад застосування формули (7) для знаходження кількості різних газових сумішей, які можна отримати з допомогою заданого змішувача

Нехай маємо змішувач для приготування перевірювальних газових сумішей для атестації хроматографа складу природного газу. Змішувач містить п'ять каналів основних компонентів, що входять до складу природного газу: CH_4, C_2H_6, C_3H_8, CO_2, N_2. В кожному каналі передбачено по 10 дросельних елементів, тобто n=5; $M_1=M_2=M_3=M_4=M_5$=10. Використовуючи формулу (7) та розроблені алгоритми знаходимо, що з допомогою заданого змішувача можна отримати ш=96601 різних п'ятикомпонентних газових сумішей, що представляють собою синтетичний природний газ.

1. Пат 4915123 США. Apparatus for preparing gas mixtures from constituents taken in a given proportion., Appl. № 189471, May 3, 1988 Морговський Г. А., Пистун Е. П., Теплюх З. М., Самкин Я. Л. 2. Способ подбора дросселей с равными газодинамическими сопротивлениями: А. с. 1760406 СССР / Пистун Е. П., Теплюх З. М., Дилай И. В. Опубл. в Б.И.,1992, №33. 3. Система для установления равенства газодинамических сопротивлений дросселей: А. с. 1552864 СССР / Пистун Е. П., Теплюх З. М., Дилай И. В. 4. Теплюх З., Леськів Г. Задачі побудови газодинамічних дросельних змішувачів для перевірки аналітичних приладів // Вісник ДУ"ЛПІ" Теплоенергетика. Інженерія довкілля. Автоматизація, 2000. - № 404 5. Бухштаб А. А. Теория чисел.- М.: Просвещение, 1966. – 384 с.