Наука — виробництву

УДК 519:24

ВКЛАДЕНІ СТАЦІОНАРНІ ПОСЛІДОВНОСТІ ПЕРІОДИЧНИХ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ В ЗАВДАННІ ОБРОБКИ ГАЗОНАВАНТАЖЕНЬ

М.В.Приймак, О.В.Мацюк

ТДТУ, м. Тернопіль, вул. Руська, 56, тел. (0352) 253413,
e-mail: Kaf_KN@tu.edu.te.ua

Определены φ-серии – вложенные по отношению к случайным периодическим процессам последовательности. Учитывая, что φ-серии – стационарные последовательности, а различные φ_i- и φ_j-серии – стационарно связанные, записаны статистики для оценки их моментных и смешанных моментных функций порядка $n \geq 1$. На основании этих статистик проведена обработка потребления газа по периодичной оценке его математического ожидания и дисперсии. Полученные результаты могут быть использованы при решении задач энергосбережения, оптимизации управления в газовой промышленности.

φ-series – enclosed relatively to random periodical processes sequences are signified. Taking into account that φ-series are stationary sequences and different φ_i- and φ_j-series – stationary enclosed the statistics for their moment and mixed moment functions estimation of $n \geq 1$ order are written. On the basis of these statistics the processing of gas consuming in accordance with its periodical mathematical expectation and dispersion estimation is made. The obtained results may be used while solving the energy keeping, control optimization in gas industry problems.

Вступ. Подібно до енергонавантажень, які належать до множини стохастично періодичних сигналів [1], у [2] було показано, що для газонавантажень також характерна стохастична періодичність, один із періодів якої $T = 24$ год. Поняття стохастичної періодичності сигналів, а в нашому випадку газонавантажень, означає, що хоч для їх графіків (реалізацій) детермінована періодичність відсутня, періодичними є їх певні ймовірнісні характеристики.

Незважаючи на те, що стохастично періодичні сигнали виділені із множини нестаціонарних, на даний час розроблено ряд методів оцінювання їх періодичних характеристик та розрахунку прогнозних значень [1,3]. Розробка подібних методів важлива і для статистичного аналізу газонавантажень, оскільки тільки на базі достовірних оцінок, які враховують характерні особливості стохастичної періодичності, можливе вирішення важливих завдань з оптимізації управління, підвищення ефективності функціонування газової промисловості загалом, її окремих регіонів.

Для розробки методів, алгоритмів та відповідного програмного забезпечення для обробки газонавантажень попередньо необхідно вибрати модель, яка певною мірою враховує їх стохастичну періодичність. Як наголошувалося в [2], із описових моделей це можуть бути періодичні (за Слуцьким) або періодично корельовані процеси. Методи статистичного аналізу та прогнозу цих процесів базуються на тому, що їх φ-серії, тобто відліки процесу, взяті через період T з деякою початковою фазою φ, утворюють стаціонарні послідовності. Тому важливо спочатку зупинитися на означенні та властивостях φ-серій і на цій основі побудувати алгоритми обробки газонавантажень.

Мета роботи — дослідження властивостей φ-серій для періодичних випадкових процесів та розробка на цій основі методів оцінки періодичних ймовірнісних характеристик графіків газоспоживання.

Будемо вважати, що моделлю газонавантажень є періодичний випадковий процес

$$\xi(t),\ t \in (-\infty, \infty), \qquad (1)$$

для якого згідно з [4] періодичною є його багатовимірна функція розподілу

$$F(x_1,..,x_n;t_1,..,t_n) = P\{\xi(t_1) < x_1,..,\xi(t_n) < x_n\} = = F(x_1,..,x_n;t_1+T,..,t_n+T). \qquad (2)$$

Нехай для процесу (1) існують моментні функції порядку $n \ge 1$, тобто математичне сподівання $M|\xi(t)|^n < \infty$. Враховуючи (2), легко показати, що моментні функції періодичного процесу також будуть періодичними з цим же періодом T, тобто:

$$m^{(k_1,\ldots k_m)}(t_1,\ldots,t_m)=M\left\{\xi^{k_1}(t_1)\cdots\xi^{k_m}(t_m)\right\}=$$
$$=m^{(k_1,\ldots k_m)}(t_1+T,\ldots,t_m+T). \qquad (3)$$

де $k_1+\ldots+k_m=k$ – порядок моменту, $k \le n$.

Серед моментних функцій в прикладних дослідженнях найбільше використовуються функції перших двох порядків, які згідно з (3) будуть періодичними. Це — математичне сподівання

$$M\xi(t)=m(t)=m(t+T)=M\xi(t+T)$$

та дисперсія

$$D\xi(t)=M\,\overset{o}{\xi}(t)=M\xi^2(t)-[M\xi(t)]^2=$$
$$=m^{(2)}(t)-[m(t)]^2=m^2(t+T)-[m(t+T)]^2=$$
$$=D\xi(t+T).$$

φ-серії — основа статистичного аналізу періодичних випадкових процесів. Зупинимося тепер на понятті і деяких властивостях φ-серії, які відіграють головну роль при знаходженні оцінок параметрів і періодичних моментних функцій періодичних процесів.

Як відомо, загальним для всіх обчислювальних алгоритмів є робота з дискретними реалізаціями скінченного об’єму (скінченновимірними масивами). Методи статистичного аналізу періодичних процесів також повинні бути орієнтовані на використання ЕОМ. Тому, коли вихідною є реалізація неперервного аргументу, її необхідно попередньо дискретизувати з деяким кроком дискретизації h. У нашому випадку при переході до дискретної реалізації періодичного процесу будемо вважати, що крок дискретизації

$$\Delta t \overset{df}{=} h=\frac{T}{L},\ L\ge 2 \text{ – ціле},$$

де T – період процесу.

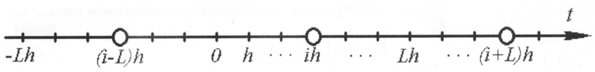
Для вибраного h і кожного із фіксованих i, які набувають значення із множини $\{0,1,\ldots,L-1\}$, введемо на дійсній осі $(-\infty,\infty)$ множину точок $\varphi_i=\{ih+lT,\ l\in Z\}$, $i=\overline{0,L-1}$, яку назвемо φ_i – сіткою. Сітку, що є об’єднанням φ_i – сіток, $i=\overline{0,L-1}$, позначимо через $\overline{\varphi}$

$$\overline{\varphi}=\bigcup_{i=0}^{L-1}\varphi_i=\bigcup_{i=0}^{L-1}\{ih+lT,l\in Z\}=$$
$$=\left\{ih+lT,l\in Z,i=\overline{0,L-1}\right\}$$

або, враховуючи, що $T=Lh$,

$$\overline{\varphi}=\left\{(i+lL)h,l\in Z,i=\overline{0,L-1}\right\}.$$

Як приклад, на осі t точками відмічені вузли (координати) $\overline{\varphi}$ – сітки, вузли однієї із φ_i – сіток позначені кружечками



Визначимо на $\overline{\varphi}$ – сітці, вкладеній відносно періодичного процесу $\xi(t)$, процес із дискретним аргументом (послідовність)

$$\left\{\xi_i(l),\ l\in Z,\ i=\overline{0,L-1}\right\}, \qquad (4)$$

який збігається з відповідними значеннями періодичного процесу $\xi(t)$

$$\left\{\xi_i(l)=\xi(ih+lT),l\in Z,i=\overline{0,L-1}\right\}.$$

Оскільки $T=Lh$, то, очевидно,

$$\left\{\xi_i(l)=\xi((i+lL)h),l\in Z,i=\overline{0,L-1}\right\}.$$

Враховуючи це позначення, вкладений процес (4) іноді зручно записувати у вигляді

$$\left\{\xi_{i+lL}=\xi((i+lL)h),l\in Z,i=\overline{0,L-1}\right\}.$$

Останнє позначення буде використане нижче при розгляді питання оцінок ймовірнісних характеристик періодичних процесів.

Якщо в (4) зафіксувати одне із значень i, то вкладений процес $\left\{\xi_i(l),l\in Z\right\},i=\overline{0,L-1}$ назвемо φ_i – серією. Областю її визначення, очевидно, є φ_i – сітка. Для φ_i – серій її моментну функцію порядку k позначимо через

$$m_i^{(k)}(l)=M\xi_i^k(l)=M\xi_i^k(ih+lT).$$

Можна показати, що φ_i – серії є стаціонарними і стаціонарно пов’язаними у вузькому розумінні. Але, оскільки в задачах статистичного аналізу періодичних процесів здебільшого обмежуються моментними функціями не вище $2^{\text{го}}$ порядку (тобто обмежуються періодично корельованими процесами [1-4]), то зупинимося на деяких властивостях φ_i – серій в рамках кореляційної теорії.

Позначимо взаємну кореляційну функцію φ_i – і φ_j – серій через

$$R_{ij}(l_1,l_2)=M\left\{[\xi_i(l_1)-M\xi_i(l_1)][\xi_j(l_2)-M\xi_j(l_2)]\right\}=$$
$$=m_{ij}^{(1,1)}(l_1,l_2)-m_i(l_1)m_j(l_2).$$

Для випадку, коли $j=i$,

$$R_{ii}(l_1,l_2)=R_i(l_1,l_2).$$

Стаціонарність і стаціонарна зв’язаність φ_i – серій означає, що їх математичне сподівання і дисперсія постійні, тобто:

$$M\xi_i(l)=m_i(l)=m_i,\ D\xi_i(l)=d_i,$$
$$l\in Z,\ i=\overline{0,L-1};$$

кореляційна функція φ_i – серії залежить лише від різниці аргументів

$$R_i(l_1,l_2)=R_i(l_2-l_1)=R_i(\tau),\ \tau=l_2-l_1,\ i=\overline{0,L-1};$$

взаємна кореляційна функція різних φ_i – і φ_j – серій також залежить від різниці аргументів

$$R_{ij}(l_1,l_2)=R_{ij}(\tau),\ i,j=\overline{0,L-1}.$$

Оскільки φ_i –серії є стаціонарними і стаціонарно пов'язаними, для їх статистичного аналізу можуть бути застосовані відомі методи спектрально кореляційної теорії стаціонарних послідовностей, зокрема, методи оцінки їх математичного сподівання, вищих $(n\geq 2)$ моментних функцій, оцінки кореляційної і взаємної кореляційної функцій, оцінки спектральної щільності тощо. Беручи до уваги, що моделлю газонавантажень є періодичний випадковий процес, для їх дослідження також можуть бути успішно використані методи аналізу φ_i –серій. Тому на питанні статистичного аналізу періодичних випадкових процесів зупинимось більш детально.

Оцінки ймовірнісних характеристик періодичних процесів. Розглянемо оцінки основних періодичних ймовірнісних характеристик періодичних процесів.

Оцінка математичного сподівання

Нехай

$$\{\xi(t), t\in[0,T_0], T_0>>T\}\ — \tag{5}$$

реалізація випадкового періодичного з періодом T процесу $\xi(t)$, задана на відрізку $[0,\ T_0]$. Оцінкою математичного сподівання процесу в будь-якій точці t, що належить проміжку $[0,\ T]$, є статистика

$$\widetilde{m}(t)=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}\xi(t+sT), \tag{6}$$

де $N=\left[\frac{T_0}{T}\right]$ – ціла частина.

Легко показати, що оцінка математичного сподівання (6) є незміщеною, а за умови, що кореляційна функція

$$R(t+sT)=M\overset{0}{\xi}(t)\overset{0}{\xi}(t+kT)\xrightarrow[s\to\infty]{}0,$$

буде також слушною.

Оцінка (6) записана для випадку наявності реалізацій з неперервним аргументом. Однак при аналізі реальних стохастично періодичних сигналів на ЕОМ, у нашому випадку газонавантажень, ми маємо справу з дискретними реалізаціями, отриманими з деяким кроком дискретизації Δt. Оцінку математичного сподівання наведемо для цього випадку.

Нехай

$$\left\{\begin{matrix}\xi_i=\xi(t_i)=\xi(i\Delta t),\ i=\overline{0,n-1},\ \Delta t=\dfrac{T}{L},\\ L>1-ціле,\ t_i=i\cdot\Delta t,\ n>>L\end{matrix}\right\}\ – \tag{7}$$

дискретна реалізація періодичного з періодом T процесу $\xi(t)$. Для оцінки математичного сподівання $M\xi(t_i)$ на дискретній множині точок $\{t_i=i\Delta t, i=\overline{0,L-1}\}$, розміщених на відрізку $[0,\ T]$, використовується статистика

$$\widetilde{m}_i=\widetilde{m}(t_i)=\widetilde{m}(i\Delta t)=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}\xi_{i+sL},\ i=\overline{0,L-1}, \tag{8}$$

де $N=\left[\frac{n}{L}\right]$ – ціла частина.

Оцінка дисперсії і кореляційної функції

За наявності дискретної реалізації (7) оцінкою кореляційної функції

$$R_{ij}=R(i\Delta t,j\Delta t)=M\left\{\overset{0}{\xi}_i\overset{0}{\xi}_j\right\}=M\left\{\overset{0}{\xi}(i\Delta t)\overset{0}{\xi}(j\Delta t)\right\}$$

у точках $t_i=i\Delta t,\ t_j=j\Delta t$ буде статистика

$$\widetilde{r}_{ij}=\widetilde{r}(i\Delta t,j\Delta t)=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}\overset{0}{\xi}_{i+sL}\cdot\overset{0}{\xi}_{j+sL},\quad i=\overline{0,L-1},\ j>i, \tag{9}$$

де $N=\left[\frac{n-j}{L}\right]$; $\overset{0}{\xi}_{i+sL}=\xi_{i+sL}-\widetilde{m}_i$;

$$\overset{0}{\xi}_{j+sL}=\xi_{j+sL}-\widetilde{m}_{j-\left[\frac{j}{L}\right]L}.$$

При $j=i$ отримаємо оцінку для дисперсії $d_i=D\xi_i=D\xi(i\Delta t)$

$$\widetilde{d}_i=\widetilde{d}(i\Delta t)=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}\overset{0}{\xi}{}^2_{i+sT},\ i=\overline{0,L-1}. \tag{10}$$

Середньоквадратичне відхилення визначаємо за формулою $\widetilde{\sigma}_i=\sqrt{\widetilde{d}_i}, i=\overline{1,L-1}$.

Оцінкою нормованої кореляційної функції $\rho_{ij}=\dfrac{R_{ij}}{\sqrt{d_id_j}}$ є статистика $\widetilde{\rho}_{jl}=\dfrac{\widetilde{r}_{ij}}{\sqrt{\widetilde{d}_i\widetilde{d}_j}}$, де $\widetilde{r}_{ij}$ обчислюється за формулою (9), а $\widetilde{d}_i$ і $\widetilde{d}_j$ – за формулою (10).

Оцінка вищих моментних функцій періодичних процесів

Нехай $\{\xi(t), t\in[0,T_0]\}$ – реалізація періодичного з періодом T випадкового процесу $\xi(t)$. Оцінкою його періодичної моментної функції

$$m(t_1,\ldots,t_k)\overset{dt}{=}m^{(1,\ldots,1)}(t_1,\ldots,t_k)=M\{\xi(t_1)\ldots\xi(t_k)\}, k>2,$$

де $(1,\ldots,1)$ – вектор розмірності k,

$t_1\in[0,T],\ t_{i+1}\geq t_i,\ i=\overline{1,k-1}$ є статистика

$$\widetilde{m}^{(1,\ldots,1)}(t_1,\ldots,t_k)=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}\xi(t_1+sT)\ldots\xi(t_k+sT), \tag{11}$$

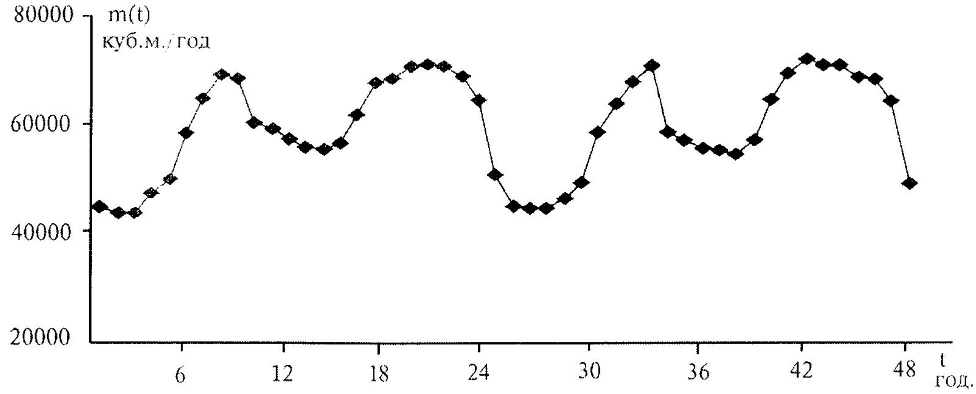


Рисунок 1 — Оцінка математичного сподівання газоспоживання протягом двох періодів для Тернопільгаз за січень 2000 року

де t_k таке, що $N=\left[\frac{T_0-t_k}{T}\right]>1$.

Якщо в (11) всі $t_i,\ i=\overline{1,k}$ збігаються, то статистика

$$\widetilde{m}^{(k)}(t_1)=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}\xi^k(t_1+sT), k=\left[\frac{T_0-t_1}{T}\right] \quad (12)$$

буде оцінкою періодичної моментної функції $m^{(k)}(t_1)=M\xi^k(t_1)$.

На основі оцінок (11),(12) можуть бути записані відповідні оцінки моментних функцій і при використанні дискретної реалізації (7). Наприклад, оцінкою моментної функції k – го порядку $k>2$

$$m_{i_1,\ldots,i_k}^{(1,\ldots,1)}=m^{(1,\ldots,1)}(i_1\Delta t,\ldots,i_k\Delta t)=M\{\xi(i_1\Delta t)\cdot\cdot\xi(i_k\Delta t)\}$$

буде статистика

$$\widetilde{m}_{i_1,\ldots,i_k}^{(1,\ldots,1)}=\frac{1}{N}\sum_{s=0}^{N-1}\xi_{i_1+sL}\cdots\xi_{i_k+sL},$$

де $i_1\le\cdot\cdot\le i_k$, $N=\left[\frac{n-i_k}{L}\right]$.

Наведені оцінки моментних функцій φ_i – серій можуть бути використані для статистичного аналізу періодичних випадкових процесів, зокрема газонавантажень. У роботі проведено аналіз реальних графіків споживання газу і отримані оцінки його періодичних математичного сподівання і дисперсії. Зупинимося на окремих результатах обробки.

Результати статистичного аналізу газонавантажень

Для оцінки періодичних математичного сподівання і дисперсії були використані реальні дані споживання газу з кроком дискретизації $\Delta t=1$ година та статистики (8) і (10). Оскільки період зміни ймовірнісних характеристик у нашому випадку рівний $T=24$ години, то, беручи до уваги (7), параметр $L=\frac{T}{\Delta t}=\frac{24}{1}=24$. Це означає, що оцінювання здійснювалося в точках $t_i=i,\ i=\overline{1,24}$, тобто для кожної години доби.

Щоб переконатися, що математичне сподівання споживання газу є періодичним, на рисунку 1 наведено його оцінку, але отримано в дискретній множині точок протягом не одного, а двох періодів, тобто 48 годин. Беручи до уваги, що оцінки як функції від випадкових величин теж є випадковими, на графіку легко спостерігається майже детермінована періодичність оцінки математичного сподівання. Це є підтвердженням на користь того, що моделлю газонавантажень є періодичний випадковий процес.

На рисунках 2 і 3 наведені оцінки математичного сподівання і середньоквадратичного відхилення газоспоживання за січень 2000 і 2001 року. Аналіз графіків на рис. 2 свідчить, що оцінки математичного сподівання газоспоживання в робочі дні січня різних років (2000 і 2001 роки) подібні за формою. Максимальні значення газоспоживання спостерігаються з 7-ї до 10 години ранку і 19-ї до 22 години вечора. Найменше газоспоживання спостерігається з 12-ї до 17 години і з 23-ї до 6 години.

На рисунках 4 і 5 наведено оцінку математичного сподівання і середньоквадратичного відхилення газоспоживання за січень і червень 2000 року. З рисунків видно, що газоспоживання в січні 2000 року значно перевищує відповідні показники в червні. Очевидно, це можна пояснити тим, що в червні газ використовується тільки для побутових потреб (опалення приміщень відсутнє). Необхідно звернути увагу (рис. 4), що максимальне газоспоживання спостерігається з 8-ї до 10 години. Оцінка середньоквадратичного відхилення (рис. 3 і рис. 5) характеризує нерівномірність газоспоживання. Мінімальні значення оцінки спостерігаються в нічні години (3-7 год.) і вдень (14 – 17 год.), а максимальні значення — з 9 до 12 години і з 19 до 22 години.

Отримані погодинні оцінки характеризують нерівномірність та нерегулярність споживання газу впродовж доби, що є важливою (цінною) інформацією для диспетчерських служб газотранспортної системи.

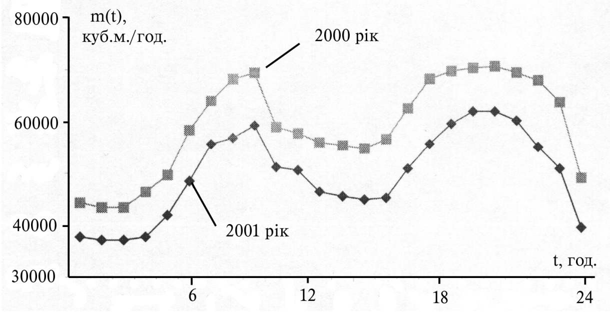


Рисунок 2 — Оцінка математичного сподівання (січень 2000, 2001)

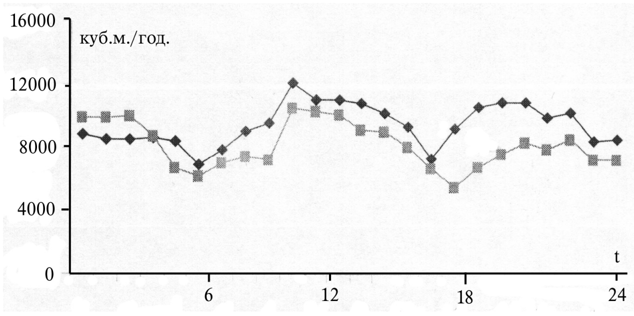


Рисунок 3 — Оцінка середньоквадратичного відхилення (січень 2000, 2001)

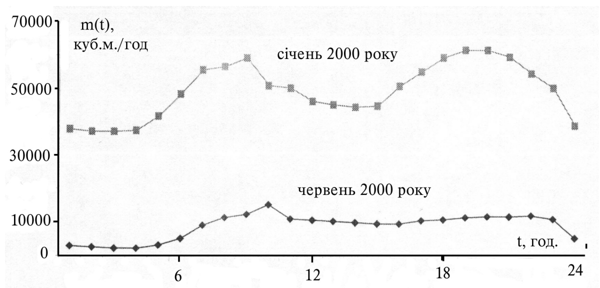


Рисунок 4 — Оцінка математичного сподівання (січень, червень 2000 року)

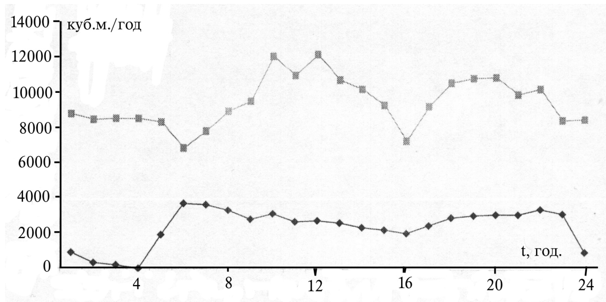


Рисунок 5 — Оцінка середньоквадратичного відхилення (січень, червень 2000 року)

Висновки

Вважаючи, що моделлю газонавантажень є періодичні випадкові процеси, реалізовано методи їх статистичного аналізу. Для цього визначені $\varphi-$серії періодичних процесів, які являють собою послідовності, взяті через період T. Оскільки $\varphi-$серії є стаціонарними і стаціонарно пов'язаними послідовностями, для них записані оцінки їх моментних функцій. Використовуючи ці оцінки, проведено статистичний аналіз реальних графіків споживання газу, отримано оцінки їх періодичних математичного сподівання і дисперсії.

Отримані оцінки підтверджують адекватність моделі газонавантажень і можуть бути використані при вирішенні завдань з енергозбереження, оптимізації управління в газовій промисловості.

Література

1. Марченко Б.Г., Приймак М.В. Побудова моделі та аналіз стохастично періодичних навантажень енергосистем // Праці Ін-ту електродинаміки. – Київ: ІЕД НАН України, 1999. – Вип. 1. – С.129-153.

2. Мацюк О.В., Приймак М.В. Моделі газонавантажень з врахуванням стохастичної періодичності та можливості їх статистичного аналізу // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – 2003. – № 2(7). – С. 64-68.

3. Приймак М.В. Основи теорії моделювання, аналізу і прогнозу в автоматизованих системах управління ритмічними процесами: Автореф. дис…докт. техн. наук: 05.13.06. – К: НАУ, 2001. – 34 с.

4. Коваленко И.Н., Кузнецов Н.Ю., Шуренков В.М. Случайные процессы: Справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 367 с.