УДК 621.643.2., 622.276

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗМІРІВ ЗОНИ РЕМОНТУ ТРУБОПРОВОДУ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ПОЛІНОМІВ ЕРМІТА

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу

Одержано розв'язок варіаційної задачі для функціоналу повної енергії напівоберненим методом з використанням апарату многочленів Ерміта. При цьому визначено оптимальні розміри ділянки трубопроводу з точки зору мінімальної зміни напруженого стану за реальними геометричними та фізико-механічними її характеристиками.

Розглядається задача оцінки розмірів зони ремонтних робіт, які передбачають підйом ділянки труби, що в ідеальному стані є прямолінійною та горизонтальною. Задаються параметри трубопроводу і діаметр D, величина погонного навантаження q, момент інерції січення J. Передбачається, що в процесі підйому максимальна висота підйому становить h. Підйом здійснюється таким чином, що конфігурація осі після підйому є симетричною відносно вертикальної осі, розглядаються схеми, при яких підйом здійснюється в одній площині. Нехай $u(x)$ - переміщення точок осі у вертикальній площині. Необхідно визначити довжину відрізка $[-a;a]$, на якому виконуються наступні умови:

$$u(-a)=0;\ \frac{du}{dx}(-a)=0;\ u(0)=h;\ \frac{du}{dx}(0)=0;\ u(a)=0;\ \frac{du}{dx}(a)=0, \tag{1}$$

а також визначити, яких максимальних напружень зазнає ділянка трубопроводу при вказаній схемі підйому. Таким чином, використовуючи методи математичного моделювання, здійснюється контроль механічних параметрів ділянки в процесі ремонту.

Вказана задача може бути розв'язана з використанням напівоберненого методу, що базується на застосуванні інтерполяційних поліномів Ерміта [1]. Побудова полінома Ерміта за умовами (1) передбачає, що при наявності шести умов інтерполяції степінь многочлена Ерміта буде п'ятою, проте, враховуючи, що серед умов (1) є лише одна ненульова, алгоритм побудови лінії $u(x)$, для якої виконуються вимоги (1), суттєво спрощується, а форма лінії $u(x)$ задається у вигляді:

$$u(x)=(x-a)^2\cdot(x+a)^2\cdot(\alpha\cdot x+\beta)\cdot h, \tag{2}$$

де α та β - коефіцієнти, що підлягають визначенню з використанням умов

$$u(0)=h,\ u'(0)=0. \tag{3}$$

Підставляючи $x=0$ в (2) з урахуванням (3) одержуємо:

$$h=a^4\cdot\beta\cdot h\Rightarrow\beta=\frac{1}{a^4},\quad 0=\alpha\cdot h\cdot a^4\Rightarrow\alpha=0. \tag{4}$$

Таким чином, подання (2) набуває виду:

$$u(x)=h\cdot\frac{(x^2-a^2)^2}{a^4}. \tag{5}$$

В залежності (5) єдиною невідомою величиною є параметр a, який підлягає визначенню. Якщо прийняти допущення про те, що розподілені моменти відсутні, функціонал повної потенціальної енергії для прогину ділянки трубопроводу W запишеться у вигляді [2]:

$$W=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}E\cdot J\cdot\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2dx-\int_{-a}^{a}q\cdot u(x)dx, \tag{6}$$

де E - модуль Юнга для трубопровідної сталі. Умова екстремуму функціонала (6) записується у вигляді варіаційного рівняння Лагранжа:

$$\delta W=\int_{-a}^{a}\left[\left(E\cdot J\cdot\frac{d^2u}{dx^2}\right)''-q\right]\cdot\delta u dx=0, \tag{7}$$

де δu - варіація переміщення $u(x)$, звідки витікає диференціальне рівняння прогину балки (з використанням основної леми варіаційного числення [3]):

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E\cdot J\cdot\frac{d^2u}{dx^2}\right)-q=0. \tag{8}$$

Для визначення єдиного розв'язку вказаного рівняння необхідно задати граничні умови, які в даному випадку співпадатимуть з умовами (1). Очевидно, що (5) задовольняє вказані граничні умови, при цьому величина a підлягає визначенню. Використання апарату інтерполяційних многочленів Ерміта дозволяє звести розв'язок варіаційної задачі (6) до знаходження мінімуму функції однієї змінної. Підставляючи в (8) вираз для $u(x)$ (5) визначимо, при яких значеннях параметра a виконується рівняння (8):

$$\frac{24 \cdot E \cdot J \cdot h}{a^4} - q = 0, \tag{9}$$

звідки для визначення величини a одержується формула:

$$a = \sqrt[4]{\frac{24 \cdot E \cdot J \cdot h}{q}}. \tag{10}$$

Для оцінки максимальних повздовжніх напружень σ^{11} використовується формула:

$$\left|\sigma^{11}_{\max}\right| = \left| -R_{mp} \cdot E \cdot \frac{d^2u}{dx^2} \right|_{\max}, \tag{11}$$

де $R_{\text{тр}}$ - радіус труби. Використовуючи формулу (5), знаходиться максимум другої похідної $\frac{d^2u}{dx^2}$ на відрізку [$-a$; a], який досягається в граничних точках відрізку:

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{\max} = \frac{8 \cdot h}{a^2}, \tag{12}$$

тому величина (11) набуває значення:

$$\left|\sigma^{11}_{\max}\right| = \frac{8 \cdot R_{mp} \cdot E \cdot h}{a^2}. \tag{13}$$

Форма осі, що задається у вигляді (5), є оптимальною конфігурацією осі з точки зору зміни напружено-деформованого стану. Аналогічно можна розв'язати задачу знаходження оптимальної конфігурації осі для нерівномірного погонного навантаження – в цьому випадку в функціоналі енергії (6) величина q приймається такою, що залежить від погонної координати x:

$$q = q(x), \tag{14}$$

а також розглянути випадки непрямолінійної осі, несиметричної схеми підйому. При цьому ускладнюється тип аналітичних залежностей при незмінному алгоритмі розв'язку задачі. Якщо розглядається схема, в якій трубопровід зазнає дії повздовжньої сили P, функціонал (6) набуває вигляду:

$$W = \frac{1}{2} \int_{-a}^{a} \left[E \cdot J \cdot \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 - P \cdot \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \right] dx - \int_{-a}^{a} q \cdot u dx. \tag{15}$$

В такому випадку після підстановки в (15) залежності (5) для розглянутої в задачі симетричної схеми підйому задача знаходження екстремуму функціоналу (15) зводиться до задачі знаходження екстремуму функції однієї змінної:

$$W(a) = \frac{64 \cdot h^2 \cdot E \cdot J}{a^3} - \frac{128 \cdot p \cdot h^2}{a} - \frac{16}{15} \cdot h \cdot q \cdot a. \tag{16}$$

Перевіряючи необхідну умову екстремуму

$$W'(a) = 0 = \frac{-180h \cdot J \cdot E + 120p \cdot h \cdot a^2 - q \cdot a^4}{15 \cdot a^4} \tag{17}$$

одержуємо:

$$a^2_{1,2} = \frac{120 \cdot P \cdot h \pm \sqrt{14400P^2 \cdot h^2 \cdot 720 \cdot q \cdot h \cdot J \cdot E}}{2 \cdot q}, \tag{18}$$

звідки, знаючи величину P, можна визначити величину зони ремонтних робіт при вказаному типі навантажень, яка є оптимальною з точки зору зміни напружено-деформованого стану вказаної ділянки. З двох значень величин в (18) вибирається менше.

Для розробленої моделі проведемо тестові розрахунки. Для реальної ділянки магістрального трубопроводу з параметрами D=1420 мм; q=12,6 кН/м; J=2102847,6 см^4; h=0,2 м; E=210000 МПа одержується a=36 м, $\sigma^{11} = 180$ МПа, що відповідає як реальним можливостям техніки для підйому, так і умовам міцності трубопроводу.

1. Самарский А. А., Гумин А. В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. – 432 с. 2. Алфутов Н. А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. - М.: Машиностроение, 1991. – 336 с. 3. Александров А. Т. Оптимальные и адаптивные системы. - М.: Высшая школа, 1989. – 263 с.