Дослідження та методи аналізу

УДК 539.41:622.245.3

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНІХ СИЛОВИХ ЧИННИКІВ У ОБСАДНІЙ КОЛОНІ ГЛИБОКОЇ, ПРОСТОРОВО ОРІЄНТОВАНОЇ СВЕРДЛОВИНИ

І. І. Палійчук

ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (03422) 44277,
e-mail: public@nung.edu.ua

Нерозрізна обсадна колона повторює форму просторово викривленої свердловини та знаходиться у такому напруженому стані, як довгий пружний стержень, який отримав великі нелінійні деформації. Для його визначення застосована теорія нелінійно деформованих гнучких стержнів і одержано розв'язки системи однорідних диференціальних рівнянь, які дозволили розрахувати усі внутрішні силові чинники (сили і моменти) у перерізах колони. Це дало змогу провести аналіз напруженого стану колони обсадних труб у глибокій свердловині для умов складного навантаження, а саме просторового згину і кручення з одночасною дією повздовжньої і поперечних сил.

Ключові слова: обсадна колона; викривлення свердловини; гнучкий стержень; напружений стан; нелінійні деформації; внутрішні сили і моменти; обсадні труби.

Неразрезная обсадная колонна повторяет форму пространственно искривлённой скважины и находится в таком напряженном состоянии, как длинный упругий стержень, который получил большие нелинейные деформации. Для его определения применена теория нелинейно деформированных гибких стержней и получены решения системы однородных дифференциальных уравнений, которые позволяют рассчитать все внутренние силовые факторы (силы и моменты) в сечениях колонны. Это дало возможность провести анализ напряженного состояния колонны обсадных труб в глубокой скважине для условий сложного нагружения, а именно пространственного изгиба и кручения с одновременным действием продольной и поперечных сил.

Ключевые слова: обсадная колонна; искривленная скважина; гибкий стержень; напряженное состояние; нелинейные деформации; внутренние силы и моменты; обсадные трубы.

The continuous casing column follows the shape of the spatially curved borehole and is in a stress state, as a long elastic rod, which received large nonlinear deformation. The theory of nonlinear deformable flexible rods has been applied to determine it. Also we have obtained by solving a system of homogeneous differential equations that allow to calculate all internal force factors (forces and moments) in the column section. This made it possible to analyze the stress state of the casing string in a deep well under complex loading – spatial bending and twisting under the influence of the longitudinal and shear forces.

Keywords: casing string; curved well; flexible rod; stress state; nonlinear deformation; internal forces and moments; casing pipes.

Вступ

Для надійного тривалого видобування енергоносіїв нафтові і газові свердловини кріплять сталевими обсадними трубами з метою захисту їх стінок від руйнування, ізоляції шарів різних гірських порід з різними пластовими тисками від перетікання надрових флюїдів, для створення герметичного і довговічного каналу, який з'єднує устя свердловини з продуктивною привибійною зоною на великих глибинах.

Аналіз сучасних технологій кріплення свердловин

Сучасні технології похило скерованого та горизонтального буріння дають змогу досягати продуктивних пластів на глибині 4-7 км при довжині колони труб 7-10 км і більше. Сама свердловина має складну, просторово викривлену вісь, а діаметр основної експлуатаційної колони складає, зазвичай, лише 140-168 мм при товщині стінок труб 10-12 мм.

Колону труб центрують відносно стінок свердловини пристроями, як правило, ліхтарного типу. Їх розміщують на трубах залежно від зенітного кута нахилу осі до вертикалі. За стандартом API 10D та методикою фірми "Weatherford" (США) при куті до 10^{o} встановлюють 1 центратор на трубу; при куті від 10^{o} до 20^{o} – 2 центратори; при куті понад 20^{o} – 3 центратори; труби можуть мати довжину у середньому від 9 до 13 м. Центрування забезпечує співвісність колони труб і свердловини та утворення цементного кільця однакової товщини і міцності при цементуванні затрубного простору.

Технологія центрування дозволяє прийняти (у першому наближенні розв'язання задачі), що колона обсадних труб повторює форму свердловини. Тому форму колони труб як просторову криву можна описати за результатами інклінометричних досліджень свердловини. При цьому вимірюванням з відповідною точністю отримують значення зенітного кута ϑ нахилу та азимута Az осі або кута $\psi = D_{Az} - Az$ азимутального відхилення осі свердловини від дирекційного напрямку буріння D_{Az}. Кути ϑ і ψ є відповідно кутами нутації і прецесії у системі кутів Ейлера-Крилова. Виміри проводять з приростом 10 м на кожне вимірювання вздовж осі колони.

Таким чином, чисельним методом можна визначити координати осі колони у прямокутній системі $Oxyz$, де початок координат O розміщений на осі устя свердловини на рівні денної поверхні, вісь Oz спрямована вертикально вниз, вісь Ox – у дирекційному напрямку, вісь Oy – перпендикулярно до площини Oxz так, що осі утворюють праву систему координат. При цьому прирости координат точок осі колони визначають за кутами Ейлера-Крилова:

$$dx = ds \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\psi, \quad dy = ds \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\psi,$$
$$dz = ds \cdot \cos\vartheta, \qquad (1)$$

де ds – приріст довжини осі колони.

Послідовно додаючи прирости, визначають координати точок осі колони: z – глибину по вертикалі; x – відстань від устя по горизонталі у дирекційному напрямку; y – горизонтальне відхилення від дирекційного напрямку.

Постановка задачі і мета роботи

Колону обсадних труб слід розглядати як суцільний нерозрізний пружний стержень великої довжини (від устя до вибою) та подвійної кривизни, який отримав великі деформації внаслідок повторення форми свердловини. Зовнішні просторові деформації трубної колони є великими і нелінійними, тому їх не можна описати лінійними рівняннями опору матеріалів, які традиційно використовують для визначення прогинів нерозрізних балок. При цьому внутрішні пружні деформації у стінках труб залишаються у межах пропорційності і закону Гука. Вихід за ці межі призведе до пластичного зминання труб та аварійного пошкодження колони.

У роботах [1-6] описані методики розв'язку задач визначення нелінійних деформацій довгого гнучкого стержня у випадках, коли його просторова форма утворена дією зовнішніх силових чинників і внутрішніх пружних сил та є невідомою. Розв'язання поставленої тут задачі теж ґрунтується на диференціальних рівняннях [2-6], які описують напружений стан довгого гнучкого стержня. Проте постановка задачі, яка відповідає технології кріплення нафтових і газових свердловин обсадними колонами, передбачає відомою просторову геометрію пружного стержня; і це зменшує кількість невідомих параметрів, які потрібно визначати.

Отже, **мета роботи** – визначити внутрішні силові чинники (сили і моменти), які визначають напружено-деформований стан, міцність і герметичність довгої, просторово орієнтованої колони труб, форма якої задана за результатами інклінометричних досліджень свердловини.

Вихідна система диференціальних рівнянь

Просторову вісь довгого пружного стержня подвійної кривизни описують наступні геометричні параметри (вісь проходить через центри ваги перпендикулярних до неї поперечних перерізів):

– натуральний тригранник осей (t, n, b), де вісь t направлена по дотичній до просторової кривої у центрі ваги перерізу у напрямку зростання s; вісь n – по головній нормалі кривої у напрямку центра кривизни; вісь b – по бінормалі так, що осі t, n, b утворюють праву ортогональну систему; його положення характеризує зовнішню геометрію осі колони труб як просторової кривої;

– головний радіус кривизни R (або перша кривизна $1/R$) і радіус скруту T (або друга кривизна $1/T$) криволінійної осі; вони задають натуральне рівняння просторової кривої: $R=R(s)$, $T=T(s)$, та визначаються за формулами [6]:

$$\frac{1}{R^2} = (x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2,$$
$$\frac{1}{T} = R^2 \cdot \begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

де $'$ (штрих) означає диференціювання по s, яке можна виконати за формулами (1).

– головний тригранник осей (u, v, t), де u і v – головні центральні осі інерції перерізу; його положення характеризує внутрішні пружні деформації у стержні;

– якщо уявити рух головного тригранника вздовж криволінійної просторової осі колони з одиничною швидкістю ($ds=1 \cdot dt$), то він буде обертатися у просторі, а проекції на осі (u, v, t) його кутової швидкості обертання будуть відповідно [2-6]:

$$p = \frac{\sin\chi}{R}, \quad q = \frac{\cos\chi}{R}, \quad r = \frac{1}{T} + \frac{d\chi}{ds}, \qquad (3)$$

де χ – кут між осями n і u (або між b і v) у поперечному перерізі, який теж є функцією від s: $\chi=\chi(s)$ (як додатний відраховується проти годинникової стрілки).

Геометрично параметри p і q є проекціями кривизни елемента ds просторової кривої на головні площини відповідно (v, t) і (u, t) [3].

Диференціальні рівняння рівноваги пружного довгого стержня просторової кривизни вперше були запропоновані Г. Кірхгофом у 1859 році [1] та розвинені у подальших роботах, наприклад [2-6]:

– рівняння рівноваги внутрішніх і зовнішніх сил:

$$\begin{aligned} &Q_u' - r\,Q_v + q\,Q_t = -f_u\,, \\ &Q_v' + r\,Q_u - p\,Q_t = -f_v\,, \\ &Q_t' - q\,Q_u + p\,Q_v = -f_t\,, \end{aligned} \qquad (4)$$

де Q_u, Q_v, Q_t – проекції внутрішньої пружної сили у перерізі відповідно на осі u, v, t головного триедра (Q_u, Q_v – поперечні сили, Q_t – поздовжня сила);

f_u, f_v, f_t – проекції розподілених по довжині зовнішніх сил на осі u, v, t;

– рівняння рівноваги внутрішніх і зовнішніх моментів:

$$\begin{aligned} &M_u' - r\,M_v + q\,M_t = Q_v - m_u\,, \\ &M_v' + r\,M_u - p\,M_t = -Q_u - m_v\,, \\ &M_t' - q\,M_u + p\,M_v = -m_t\,, \end{aligned} \qquad (5)$$

де M_u, M_v, M_t – проекції внутрішнього пружного моменту у перерізі відповідно на осі u, v, t (M_u, M_v – згинальні моменти, M_t – крутний момент);

m_u, m_v, m_t – проекції розподілених по довжині зовнішніх моментів відповідно на осі u, v, t.

У роботах [2-6] показано зв’язок між внутрішніми моментами і жорсткостями стержня. У даній статті розглянуто випадок первісно прямолінійного, природно незакрученого стержня, якими є обсадні труби, згвинчені у колону:

$$\begin{aligned} &M_u = Ap = p\,EJ_u\,, \quad M_v = Bq = q\,EJ_v\,, \\ &M_t = Cr = r\,GJ_t\,, \end{aligned} \qquad (6)$$

де A, B – головні жорсткості при згині;

C – жорсткість при крученні;

E і G – модуль пружності і модуль зсуву матеріалу стержня;

J_u, J_v – головні моменти інерції площі поперечного перерізу;

J_t – зведений момент інерції при крученні.

Підставляючи співвідношення (6) у систему рівнянь (5), з них виключають моменти та приводять до вигляду [2-6]:

$$\begin{aligned} &A\,p' - (B-C)\,q\,r = Q_v - m_u\,, \\ &B\,q' + (A-C)\,p\,r = -Q_u - m_v\,, \\ &C\,r' - (A-B)\,p\,q = -m_t\,. \end{aligned} \qquad (7)$$

Спуск обсадної колони у свердловину та її цементування не супроводжується дією зовнішніх розподілених моментів, тому у нас вони відсутні: $m_u = m_v = m_t = 0$.

Обсадні труби мають круглий переріз, тому його осьові моменти інерції однакові, а жорсткість при крученні визначається полярним моментом інерції:

$$A = B = EJ\,, \quad C = G\cdot 2J = B/(1+\mu)\,, \qquad (8)$$

де використано зв’язок між модулями пружності: $E = 2G(1+\mu)$;

μ – коефіцієнт Пуассона для матеріалу стержня. Результат (9) узгоджується з висновком Є. Ніколаї [2].

Система (3), (4), (7) складається з 9 рівнянь, які містять 9 невідомих параметрів R, T, χ (або p, q, r), Q_u, Q_v, Q_t, M_u, M_v, M_t. Оскільки радіуси R і T першої і другої кривизн просторової осі нам відомі згідно з (2), то ми маємо 7 рівнянь для визначення 7 невідомих, що є достатнім для розв’язання системи.

Визначення внутрішніх поперечних сил

Уведемо такі коефіцієнти:

$$\begin{aligned} &m_0 = 1/(1+\mu)\,, \quad m_1 = 1 - m_0 = \mu/(1+\mu)\,, \\ &m_2 = m_1 + 1 = (1+2\mu)/(1+\mu)\,, \\ &C = m_0 B\,, \quad B - C = A - C = m_1 B\,. \end{aligned} \qquad (9)$$

Застосуємо коефіцієнти (9) у рівняннях (7) і отримаємо систему:

$$\begin{aligned} &Q_v = B\,p' - m_1 B\,r\,q\,, \\ &Q_u = -B\,q' - m_1 B\,r\,p\,, \\ &m_0 B\,r' = 0\,. \end{aligned} \qquad (10)$$

Із третього рівняння (10) робимо висновок, що при просторовому деформуванні круглого пружного стержня при відсутності зовнішніх розподілених моментів його параметр кручення r (3) залишається постійним вздовж ділянки:

$$r = T^{-1} + \chi' = const\,. \qquad (11)$$

Отже, отримано вирази (10) внутрішніх поперечних сил у перерізі стержня, які залежать від згинальної жорсткості стержня та параметрів кривизни його просторової пружної осі.

Знайдемо похідні поперечних сил, враховуючи властивість r (11):

$$\begin{aligned} &Q_v' = B\,p'' - m_1 B\,r\,q'\,, \\ &Q_u' = -B\,q'' - m_1 B\,r\,p'\,. \end{aligned} \qquad (12)$$

Тепер вирази сил (10) та їх похідних (12) можна підставити у систему (4) і отримати систему неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку, праві частини яких містять складові розподілених зовнішніх сил.

Визначення внутрішньої повздовжньої сили

Спочатку розглянемо випадок, коли

$$f_u = f_v = f_t = 0\,. \qquad (13)$$

Це приводить систему (4) до системи однорідних диференціальних рівнянь першого порядку. Цей випадок відсутності зовнішніх роз-

ISSN 1993–9973 print
ISSN 2415–332X online

поділених сил проаналізував Є.Ніколаі [2]. При цьому на кожний з двох кінців стержня (чи ділянки стержня) діють лише довільно направлені у просторі сила і момент, які разом з пружними силами стержня перебувають у рівновазі.

Підставимо вирази (10) і (12) у третє рівняння (4) і отримаємо:

$$Q_t'/B+\tfrac{1}{2}(q^2+p^2)'=0\,. \qquad (14)$$

Квадрат кривизни просторової осі:

$$\frac{1}{R^2}=\frac{\cos^2\chi}{R^2}+\frac{\sin^2\chi}{R^2}=q^2+p^2. \qquad (15)$$

З іншого боку, згідно із (6):

$$\frac{1}{R^2}=q^2+p^2=\frac{M_u^2}{B^2}+\frac{M_v^2}{A^2}=\frac{M_u^2+M_v^2}{B^2}=\frac{M^2}{B^2}\,, \qquad (16)$$

де $M=\sqrt{M_u^2+M_v^2}$ – повний згинальний момент у перерізі стержня.

Інтегруємо (14) по s на проміжку від 0 до s і отримаємо вираз сили Q_t:

$$\frac{1}{B}\int_0^s Q_t'\,d\xi+\tfrac{1}{2}\int_0^s\left(1/R^2\right)'d\xi=\frac{Q_t}{B}-\frac{Q_{t0}}{B}+\frac{1}{2R^2}-\frac{1}{2R_0^2}=0\,,$$

$$Q_t=Q_{t0}+\tfrac{1}{2}B(R_0^{-2}-R^{-2})=c_0-\tfrac{1}{2}BR^{-2}, \qquad (17)$$

де індексом 0 позначені початкові параметри у перерізі $s=0$:

$$c_0=Q_{t0}+\tfrac{1}{2}BR_0^{-2}=Q_{t0}+\tfrac{1}{2}M_0^2/B.$$

Таким чином, знайдено вираз (17) внутрішньої поздовжньої сили Q_t, яка залежить від кривизни і згинальної жорсткості стержня та від початкових параметрів Q_{t0} і M_0 при умові відсутності зовнішніх розподілених сил.

При розв'язанні задачі просторового викривлення колони обсадних труб у свердловині для визначення сталої інтегрування c_0 треба за початковий переріз першої ділянки взяти рівень колони, де починається набір зенітного кута (за даними інклінометрії). Тут початкові параметри відомі: повздовжня сила дорівнює виміряному зусиллю на гаку бурової установки мінус вага колони від устя до початкового рівня, а кривизна та згинальний момент ще дорівнюють 0.

Аналіз результату (17) для випадку відсутності розподілених сил показує:

– якщо кривизна збільшується (стержень більше загинається), то поздовжня сила зменшується (це не завжди ділянка набору зенітного кута);

– якщо кривизна зменшується (стержень більше розгинається, переходить у більш прямолінійний стан), то повздовжня сила збільшується;

– якщо кривизна не змінюється (її радіус постійний), то повздовжня сила теж не змінюється.

Визначення параметрів кручення стержня

Тепер підставимо вирази (10) і (12) у перше рівняння (4) і отримаємо:

$$q''+m_2\,r\,p'-m_1\,r^2q-q\,Q_t/B=0\,. \qquad (18)$$

Підставимо вирази (10) і (12) у друге рівняння (4) і отримаємо:

$$p''-m_2\,r\,q'-m_1\,r^2\,p-p\,Q_t/B=0\,. \qquad (19)$$

Виключимо Q_t з цих рівнянь, помноживши (18) на p, (19) на $-q$ і додавши їх:

$$q\,p''-p\,q''=\tfrac{1}{2}m_2\,r\,(p^2+q^2)'. \qquad (20)$$

Перетворимо рівняння (20), застосувавши формули (3) і (15):

$$q\,p''-p\,q''=(q\,p'-p\,q')'\,;$$

$$q\,p'=\frac{\cos\chi}{R}\left(\frac{\sin\chi}{R}\right)'=\chi'\frac{\cos^2\chi}{R^2}-\frac{\cos\chi\cdot\sin\chi}{R^3}R'\,,$$

$$p\,q'=\frac{\sin\chi}{R}\left(\frac{\cos\chi}{R}\right)'=-\chi'\frac{\sin^2\chi}{R^2}-\frac{\sin\chi\cdot\cos\chi}{R^3}R'\,,$$

$$q\,p'-p\,q'=\chi' R^{-2},\quad q\,p''-p\,q''=(\chi' R^{-2})',$$

$$(\chi' R^{-2})'=\tfrac{1}{2}m_2\,r\,(R^{-2})'. \qquad (21)$$

Застосуємо формули (3) і властивість (11) та виразимо параметр r з рівняння (21) через першу і другу кривизни (2) таким чином:

$$(\chi' R^{-2})'-\tfrac{1}{2}m_2 r(R^{-2})'=((\chi'-\tfrac{1}{2}m_2 r)\,R^{-2})'=0\,,$$

$$\chi'-\tfrac{1}{2}m_2 r=\tfrac{1}{2}m_0 r-T^{-1},$$

де згідно з (9): $1-\tfrac{1}{2}m_2=\tfrac{1}{2}m_0$. Далі отримаємо:

$$((\tfrac{1}{2}m_0 r-T^{-1})\,R^{-2})'=0\,,\quad \tfrac{1}{2}m_0(r\,R^{-2})'=(T^{-1}R^{-2})'\,,$$

$$\tfrac{1}{2}m_0 r\,(R^{-2})'=(T^{-1}R^{-2})'. \qquad (22)$$

Згідно з (8) і (9): $\tfrac{1}{2}m_0=G/E$. Тоді

$$r=\frac{E}{G}\cdot\frac{(T^{-1}R^{-2})'}{(R^{-2})'}. \qquad (23)$$

Щоб розрахувати параметр r (23), диференціюємо відомі кривизни (2):

$$(R^{-2})'=2\,(x''x'''+y''y'''+z''z''')\,; \qquad (24)$$

$$(T^{-1}R^{-2})'=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x^{IV} & y^{IV} & z^{IV}\end{vmatrix}. \qquad (25)$$

де x^{IV}, y^{IV}, z^{IV} – похідні 4-го порядку від координат.

Згідно з (6) і (9): $m_0 r=M_t/B$. (26)

Тому крутний момент теж можна розрахувати за допомогою (24) і (25):

$$M_t=2EJ\cdot\frac{(T^{-1}R^{-2})'}{(R^{-2})'}. \qquad (27)$$

Отже, знайдено вирази параметра кручення r (23) і крутного моменту M_t (27), які можна визначити за відомими радіусами кривизн R і T при умові (13).

Із (27) робимо висновок, що внутрішній крутний момент M_t виникає відразу, як тільки довгий пружний стержень набуває просторової форми згину. У випадку згину стержня в одній площині крутний момент M_t відсутній (скрут $1/T$=0). Крім того, згідно з властивістю (11) і (6) крутний момент M_t залишається постійним на ділянці стержня, яка для довгої обсадної колони є ділянкою між центраторами.

Знайдемо інтенсивність закручування χ'. Згідно з (9) $m_2=(1+2\mu)\,m_0$. Тоді з рівнянь (21) і (22) отримаємо:

$$(\chi' R^{-2})' = (1+2\mu)(T^{-1}R^{-2})'. \qquad (28)$$

Інтегруємо рівняння (28) на проміжку від 0 до s і проведемо перетворення, позначаючи індексом 0 початкові параметри у перерізі s=0:

$$\frac{\chi'}{R^2} - \frac{\chi'_0}{R_0^2} = (1+2\mu)\left(\frac{T^{-1}}{R^2} - \frac{T_0^{-1}}{R_0^2}\right),$$

$$\chi' = \chi'_0 \frac{R^2}{R_0^2} - (1+2\mu)T_0^{-1}\frac{R^2}{R_0^2} + (1+2\mu)T^{-1}. \quad (29)$$

Інтегруючи рівняння (29) по s на проміжку від 0 до s, отримаємо:

$$\chi = \left(\chi'_0 - (1+2\mu)T_0^{-1}\right)\int_0^s \frac{R^2}{R_0^2}d\xi + (1+2\mu)\int_0^s \frac{d\xi}{T}. \quad (30)$$

Знайдемо диференціальний зв'язок між інтенсивністю кручення χ' і крутним моментом M_t, застосувавши формули (6) і (9) у рівнянні (21):

$$(\chi' R^{-2})' = \frac{1+2\mu}{E}\cdot\frac{M_t}{2J}\cdot(R^{-2})'. \qquad (31)$$

Інтегруємо рівняння (31) на проміжку від 0 до s і проведемо перетворення, позначивши індексом 0 початкові параметри у перерізі s=0:

$$\frac{\chi'}{R^2} - \frac{\chi'_0}{R_0^2} = \frac{1+2\mu}{E}\frac{M_t}{2J}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_0^2}\right),$$

$$\chi' = \frac{1+2\mu}{E}\frac{M_t}{2J} + \left(\chi'_0 - \frac{1+2\mu}{E}\frac{M_t}{2J}\right)\frac{R^2}{R_0^2}. \quad (32)$$

Інтегруючи рівняння (32) по s на проміжку від 0 до s, отримаємо:

$$\chi = \frac{1+2\mu}{E}\frac{M_t}{2J}s + \left(\chi'_0 - \frac{1+2\mu}{E}\frac{M_t}{2J}\right)\int_0^s \frac{R^2}{R_0^2}d\xi. \quad (33)$$

Таким чином, отримано вирази кута закручування χ та диференціальний зв'язок між інтенсивністю кручення χ' і крутним моментом M_t, які виражаються через відомі радіуси кривизн R і T при умові (13).

Визначення параметрів кривизни стержня

Запишемо рівняння (18) і (19) у систему:

$$q'' + m_2\, r\, p' - m_1\, r^2 q - qQ_t/B = 0,$$

$$p'' - m_2\, r\, q' - m_1\, r^2 p - pQ_t/B = 0. \qquad (34)$$

Здійснимо математичну компресію цих рівнянь, для чого друге помножимо на уявну одиницю i та додамо до першого:

$$(q+ip)'' - i\,m_2 r(q+ip)' -$$
$$-(m_1 r^2 + Q_t/B)(q+ip) = 0. \qquad (35)$$

Введемо функцію $w = q + ip$, яка є комплекснозначною функцією дійсного аргумента s. Тепер рівняння (35) можна записати так:

$$w'' - i\,m_2 r\, w' - (m_1 r^2 + Q_t/B)\,w = 0. \qquad (36)$$

Розв'язки диференціального рівняння (36) шукаємо у вигляді $e^{i\lambda s}$, тоді похідні розв'язків: $(e^{i\lambda s})' = i\lambda e^{i\lambda s}$, $(e^{i\lambda s})'' = -\lambda^2 e^{i\lambda s}$. Підставивши їх у (36), отримаємо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - m_2 r\,\lambda + (m_1 r^2 + Q_t/B) = 0. \qquad (37)$$

Корені цього квадратного рівняння:

$$\lambda_{11;12} = \tfrac{1}{2}m_2 r \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{m_2^2 r^2 - 4(m_1 r^2 + Q_t/B)} =$$
$$= \tfrac{1}{2}m_2 r \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(m_0 r)^2 - 4Q_t/B}, \qquad (38)$$

де згідно з (9) проведені перетворення:

$$m_2^2 r^2 - 4m_1 r^2 = m_0^2 r^2.$$

Розв'язки рівняння (36) залежать від знаку дискримінанта $D = (m_0 r)^2 - 4Q_t/B$ або відповідно до (26):

$$D = (M_t/B)^2 - 4Q_t/B = (M_t^2 - 4BQ_t)/B^2. \quad (39)$$

Випадок 1: $D>0$, який згідно з (39) відповідає такій умові:

$$M_t^2 > 4BQ_t \quad \text{або} \quad M_t/B > 4Q_t/M_t. \qquad (40)$$

У цьому випадку рівняння (37) має два дійсні корені. Застосуємо наближену формулу квадратного кореня:

$$\sqrt{m_0^2 r^2 - 4Q_t/B} = m_0 r - \frac{4Q_t/B}{2m_0 r} = m_0 r - r_*, \quad (41)$$

де $r_* = \dfrac{2Q_t/B}{m_0 r} = \dfrac{2Q_t}{M_t}$.

Тоді, застосувавши (6) і (9), отримаємо такі корені (38):

$$\lambda_{11} = r - r_* = (1+\mu)M_t/B - 2Q_t/M_t,$$

$$\lambda_{12} = m_1 r + r_* = \mu M_t/B + 2Q_t/M_t, \qquad (42)$$

де за формулами (9) проведені перетворення:

$$\tfrac{1}{2}m_2 r + \tfrac{1}{2}m_0 r = r, \quad \tfrac{1}{2}m_2 r - \tfrac{1}{2}m_0 r = m_1 r.$$

Отже, у випадку 1 розв'язок диференціального рівняння (36) має вигляд [7]:

$$w = q + ip = (c_1 + ic_2)e^{i\lambda_{11}s} + (c_3 + ic_4)e^{i\lambda_{12}s} =$$
$$= (c_1 + ic_2)\left(\cos(\lambda_{11}s) + i\sin(\lambda_{11}s)\right) +$$
$$+ (c_3 + ic_4)\left(\cos(\lambda_{12}s) + i\sin(\lambda_{12}s)\right),$$

де c_1, c_2, c_3, c_4 – сталі інтегрування, дійсні числа. Розділивши тут дійсну і уявну частини, отримаємо такі розв'язки системи диференціальних рівнянь (34):

$$q = c_1\cos(\lambda_{11}s) - c_2\sin(\lambda_{11}s) +$$
$$+ c_3\cos(\lambda_{12}s) - c_4\sin(\lambda_{12}s),$$
$$p = c_1\sin(\lambda_{11}s) + c_2\cos(\lambda_{11}s) + \qquad (43)$$
$$+ c_3\sin(\lambda_{12}s) + c_4\cos(\lambda_{12}s).$$

Для визначення коефіцієнтів c_i за початковими параметрами у перерізі s=0 (з індексом 0) отримаємо лише два рівняння:

$$q_0 = c_1 + c_3; \quad p_0 = c_2 + c_4.$$

Ще два рівняння одержимо за значеннями $q(l)$ і $p(l)$ у кінцевому перетині стержня при $s=l$, де l – довжина ділянки стержня по осі. Отримані крайові умови можна виразити через згинальні моменти за формулами (6).

Аналіз результатів

Проведемо аналіз розв'язків (42) і (43) за умовою (40).

Крутний момент M_t вважаємо додатнім (його знак вказує лише напрям закручування осі стержня – за чи проти годинникової стрілки). Тому можливі випадки:

– випадок 1а: якщо на ділянках стержня сила стискаюча: Q_t<0 (від'ємна), то умова (40) виконується завжди. Це відбувається при розвантаженні колони труб на вибій, і в цьому випадку її напружений стан описується формулами (43);

– випадок 1б: поздовжня сила розтягуюча: $Q_t > 0$ (додатна), але умова (40) виконується там, де $Q_t/B < (\frac{1}{2}m_0 r)^2 = \frac{1}{4}(M_t/B)^2$.

Підставимо коефіцієнт поперечних деформацій μ=0,3 матеріалу обсадних труб (сталь) у корені (42):

$$\lambda_{11} = 1{,}3M_t/B - 2Q_t/M_t = 1{,}3(M_t/B - 1{,}55Q_t/M_t),$$

$$\lambda_{12} = 0{,}3M_t/B + 2Q_t/M_t = 0{,}3(M_t/B + 6{,}9Q_t/M_t).$$

Для випадків 1а і 1б перший корінь завжди додатній в силу умови (40): $\lambda_{11}>0$.

Для випадку 1а (Q_t<0) другий корінь буде $\lambda_{12} = 0{,}3(M_t/B - 6{,}9Q_t/M_t)$, при цьому:

– якщо $M_t/B > 6{,}9Q_t/M_t$, то другий корінь теж додатний: $\lambda_{12}>0$;

– якщо $4Q_t/M_t < M_t/B < 6{,}9Q_t/M_t$, то другий корінь від'ємний: $\lambda_{12}<0$; тому доданки розв'язку (42), які містять $\sin(\lambda_{12}s)$, змінюють знак на протилежний.

Для випадку 1б ($0 < 4Q_t/M_t < M_t/B$) другий корінь буде додатнім: $\lambda_{12}>0$.

Розв'язки системи диференціальних рівнянь (34), які отримані при умові (13), визначають внутрішні згинальні моменти у просторово викривленому пружному стержні згідно з (6).

Згідно із (15) знайдемо квадрат кривизни просторової пружної осі, який за (16) пропорційний повному внутрішньому згинальному моменту у стержні:

$$R^{-2} = q^2 + p^2 = 2(c_1c_3 + c_2c_4)\cos(\lambda_4 s) +$$

$$+ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + c_4^2 + 2(c_1c_4 - c_2c_3)\sin(\lambda_4 s), \quad (44)$$

де $\lambda_4 = \lambda_{11} - \lambda_{12} = m_0 r - 2r_* = M_t/B - 2Q_t/M_t$.

Як бачимо, розв'язки (42-44) залежать від величин крутного моменту M_t і поздовжньої сили Q_t, які діють у перерізах стержня, та їх співвідношення. Відповідно до (27) при невеликому просторовому викривленні стержня крутний момент M_t теж буде невеликим. Тому на ділянках з невеликою силою розтягу $Q_t < 0{,}25M_t^2/B$, а головне, на стиснених ділянках стержня (Q_t<0) згинальні моменти, а отже, і просторова форма стержня, згідно з (43-44) описуються лінійною комбінацією гармонічних функцій $\sin(\lambda_i s)$ і $\cos(\lambda_i s)$, так само, як і при втраті стійкості стисненою колоною труб.

Випадок 2: D=0, який згідно з (39) відповідає умові:

$$M_t^2 = 4BQ_t \quad \text{або} \quad M_t/B = 4Q_t/M_t.$$

Тоді квадратне рівняння (37) має один корінь кратності 2:

$$\lambda_2 = \tfrac{1}{2}m_2 r = \frac{1+2\mu}{E}\cdot\frac{M_t}{2J}, \quad (45)$$

а розв'язок диференціального рівняння (36) має вигляд [7]:

$$w = q + ip = (c_1 + ic_2)e^{i\lambda_2 s} + (c_3 + ic_4)s\,e^{i\lambda_2 s} =$$

$$= (c_1 + ic_2)\big(\cos(\lambda_2 s) + i\sin(\lambda_2 s)\big) +$$

$$+ s(c_3 + ic_4)\big(\cos(\lambda_2 s) + i\sin(\lambda_2 s)\big).$$

Розділивши тут дійсну і уявну частини, отримаємо розв'язки системи диференціальних рівнянь (34) для випадку D=0:

$$q = c_1\cos(\lambda_2 s) - c_2\sin(\lambda_2 s) +$$

$$+ c_3\, s\cos(\lambda_2 s) - c_4\, s\sin(\lambda_2 s),$$

$$p = c_1\sin(\lambda_2 s) + c_2\cos(\lambda_2 s) + \quad (46)$$

$$+ c_3\, s\sin(\lambda_2 s) + c_4\, s\cos(\lambda_2 s).$$

За початковими параметрами у перерізі s=0 (з індексом 0) отримаємо два рівняння для визначення c_1 і c_2:

$$c_1 = q_0; \quad c_2 = p_0.$$

Для визначення c_3 і c_4 потрібні ще два рівняння за значеннями $q(l)$ і $p(l)$ у кінцевому перетині стержня при $s=l$. Одержані крайові умови можна виразити через згинальні моменти за формулами (6).

Випадок 3: D<0, який згідно з (39) відповідає такій умові:

$$M_t^2 < 4BQ_t \quad \text{або} \quad M_t/B < 4Q_t/M_t. \quad (47)$$

Оскільки крутний момент M_t додатній, то цей випадок можливий лише на тих ділянках стержня, де поздовжня сила розтягуюча: Q_t>0. Тоді квадратне рівняння (37) має два комплексні корені:

$$\lambda_{31} = \tfrac{1}{2}m_2 r + i\tfrac{1}{2}(m_0 r - r_*) = \lambda_2 + i\tfrac{1}{2}\lambda_4,$$

$$\lambda_{32} = \tfrac{1}{2}m_2 r - i\tfrac{1}{2}(m_0 r - r_*) = \lambda_2 - i\tfrac{1}{2}\lambda_4, \quad (48)$$

де застосовано формули (41):

$$\sqrt{-m_0^2 r^2 + 4Q_t/B} = i\sqrt{m_0^2 r^2 - 4Q_t/B} = i(m_0 r - r_*).$$

У цьому випадку розв'язок диференціального рівняння (36) має вигляд [7]:

$$w = q + ip = (c_1 + ic_2)e^{i\lambda_{31}s} + (c_3 + ic_4)e^{i\lambda_{32}s} =$$

$$= (c_1 + ic_2)\cdot\exp\big(i\lambda_2 s - \tfrac{1}{2}\lambda_4 s\big) +$$

$$+ (c_3 + ic_4)\cdot\exp\big(i\lambda_2 s + \tfrac{1}{2}\lambda_4 s\big) =$$

$$= (c_1 + ic_2)\big(\cos(\lambda_2 s) + i\sin(\lambda_2 s)\big)\cdot e^{-\frac{1}{2}\lambda_4 s} +$$

$$+ (c_3 + ic_4)\big(\cos(\lambda_2 s) + i\sin(\lambda_2 s)\big)\cdot e^{\frac{1}{2}\lambda_4 s}.$$

Розділивши тут дійсну і уявну частини, отримаємо розв'язки системи диференціальних рівнянь (34) для випадку D<0:

$$q = e^{-\frac{1}{2}\lambda_4 s}\big(c_1\cos(\lambda_2 s) - c_2\sin(\lambda_2 s)\big) +$$

$$+ e^{\frac{1}{2}\lambda_4 s}\big(c_3\cos(\lambda_2 s) - c_4\sin(\lambda_2 s)\big),$$

$$p = e^{-\frac{1}{2}\lambda_4 s}\big(c_1\sin(\lambda_2 s) + c_2\cos(\lambda_2 s)\big) + \quad (49)$$

$$+ e^{\frac{1}{2}\lambda_4 s}\big(c_3\sin(\lambda_2 s) + c_4\cos(\lambda_2 s)\big).$$

Сталі інтегрування c_i отримаємо аналогічно до випадку 1.

Аналіз розв'язків (48-49) за умовою (46) показує, що для випадку 3 коефіцієнт λ_2 (45) завжди додатний: $\lambda_2>0$. Для коефіцієнта λ_4 (44) можливо наступне:

– випадок 3а:

якщо $0 < M_t/B < 2Q_t/M_t$, то коефіцієнт λ_4 додатний: $\lambda_4 > 0$;

– випадок 3б:

якщо $2Q_t/M_t < M_t/B < 4Q_t/M_t$, то він від'ємний: $\lambda_4 < 0$, тому знак показника степеня експонент у розв'язку (49) стає протилежним.

Розв'язки (49), які згідно з (6) і (16) визначають також і внутрішні згинальні моменти у просторово викривленій довгій колоні труб, залежать від значень крутного моменту M_t і поздовжньої сили Q_t, що діють у перерізах колони, та їх співвідношення.

Отже, отримано параметри p і q кривизни стержня як функції координати s по його довжині, за якими можна розрахувати внутрішні силові чинники у будь-якому перерізі колони обсадних труб:

– згинальні моменти M_u і M_v за формулами (6);

– поперечні сили Q_u і Q_v за формулами (12).

Знаючи внутрішні сили і моменти, за відомими формулами можна визначити напружений стан колони обсадних труб, а за знайденими напруженнями у стінках труб – спроектувати їх товщину для забезпечення міцності в умовах складного навантаження, а саме просторового згину і кручення з одночасною дією поздовжньої і поперечних сил.

Висновки

Колона обсадних труб у глибокій просторово викривленій свердловині отримує великі деформації внаслідок повторення нею форми свердловини. Її напружений стан не можна визначати за традиційними лінійними рівняннями опору матеріалів, тому що її великі просторові деформацій є нелінійними. Для цього необхідно застосувати теорію нелінійних деформацій гнучких стержнів.

За даними інклінометричних досліджень свердловини відома просторова форма колони труб, що спрощує розв'язання задачі. На основі цього отримано розв'язки системи однорідних диференціальних рівнянь нелінійної теорії пружних стержнів. Вони дозволяють розрахувати усі внутрішні силові чинників (сили і моменти) у перерізах колони, а саме: внутрішні поздовжню і поперечні сили, параметри кривизни, які визначають згинальні моменти, і параметри кручення, які вказують на наявність внутрішнього крутного моменту у тілі труби.

Отримані результати дають змогу визначити напруження у стінках обсадних труб та їх муфтових з'єднань та спроектувати їх конструкцію, що дозволяє забезпечити міцність і герметичність обсадної колони в умовах складного напруженого стану у глибокій, просторово орієнтованій свердловині.

Література

1 Kirchhoff G. Ueber das Gliechgewicht und die Bewegung eines unendlich dunen elastishen Stabes / G. Kirchhoff // Journal fur die Mathematik. – Bd. 56. – 1859. – S. 285-313.

2 Николаи Е. Л. К задаче об упругой линии двоякой кривизны / Е. Л. Николаи. // Труды по механике – М.: Гостехиздат, 1955. – С. 45-277.

3 Попов Е. П. Нелинейные задачи статики тонких стержней / Е. П. Попов. – Л.-М.: Гостехиздат, 1955. – 172 с.

4 Ніколенко І. В. Диференціальні рівняння рівноваги вільних і невільних тонких стержнів / І. В. Ніколенко // Вісник Київського університету. – № 1. – 1958. – Серія астрономії, математики та механіки. Вип. 1. – С. 47-56.

5 Илюхин А. А. Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней / А. А. Илюхин. – К.: Наукова думка, 1979. – 216 с.

6 Гуляєв В. И. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней / В. И. Гуляєв, В. В. Гайдайчук, В. Л. Кошкин. – К.: Наукова думка, 1992. – 342 с.

7 Самойленко А. М. Диференціальні рівняння в задачах: Навч. посібник / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк – К.: Либідь, 2003. – 504 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 19.05.17

*Рекомендована до друку професором **Мойсишиним В.М.** (ІФНТУНГ, м. Івано-Франківськ) канд. техн. наук **Цьомком В.В.** (ГПУ «Львівгазвидобування», м. Львів)*