ГЕОМЕТРИЧНИЙ ПІДХІД ДО ЗАДАЧ КРУЧЕННЯ ПРУЖНИХ СТЕРЖНІВ

Сеничак Василь, Ріпецький Роман, Ріпецький Євген
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу
math@nung.edu.ua

Задача визначення напружень і переміщень при крученні призматичного стержня вирішується різними способами в залежності від форми поперечного перетину стержня, а тому подати якийсь простий вивід загальної формули для будь-яких перетинів неможливо [1]. У більшості випадків для визначення напружень у стержні, що має якусь нову форму перетину, потрібно кожний раз звертатися до довідника. Однак, на більшість питань можна дати відповідь і без довідника, що є дуже важливим, оскільки не завжди і не у кожному довіднику можна знайти потрібне. Перш за все, без особливих зусиль можна вказати ту точку перетину, в якій виникають найбільші дотичні напруження [2].

У 1904 році відомий німецький вчений-механік Людвіг Прандтль (1875-1953) обґрунтував і розробив **мембранну аналогію**. Виявилось, що незалежно від форми досліджуваного перетину, задача кручення призматичного стержня зводиться до того ж диференціального рівняння, що і задача про рівновагу плівки, напнутої по контуру такого ж обрису і навантаженої рівномірно розподіленим по її контуру розтягуючим зусиллям інтенсивності p та прикладеним до поверхні плівки рівномірним нормальним навантаженням інтенсивності q. Навантаження p і q вибирають таким чином, щоб прогини W мембрани у площині xOy були малими. При цьому W має задовольняти рівняння

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=-\frac{p}{q}. \qquad (1)$$

Крайова умова матиме вигляд

$$W\left(x,y\right)|_L=0. \qquad (2)$$

Неважко підібрати значення p і q такими, щоб виконувалась умова

$$W(x,y)=kU(x,y), \qquad (3)$$

де $U(x,y)$ – функція Прандтля, тобто значення функції напружень $U(x,y)$ будуть пропорційні до зміщення $W(x,y)$ точок мембрани.

Введення в розгляд функції Прандтля дало змогу реалізувати геометричний підхід до розв'язування задачі кручення. Просторовий графік, отриманий відкладанням на перпендикулярах до площини поперечного перетину значень функції напружень для відповідних точок перетину, отримав назву „горба напружень" [3], або поверхні Прандтля. Цей графік характерний тим, що його горизонталі є траєкторіями дотичних напружень, а нахил поверхні „горба напружень" пропорційний величині дотичних напружень. Маючи просторове зображення поверхні напружень Прандтля, можна не тільки скласти наочне уявлення про характер функції напружень, але й зробити важливі висновки, що стосуються розподілу напружень у поперечному перетині скрученого стержня [4]. Зокрема, для визначення дотичних напружень у будь-якій точці можна використати геометричний підхід (спосіб перетинів).

Ідея побудови поверхонь Прандтля полягає у реалізації двох етапів. На першому етапі згідно із геометрією поперечного перерізу проводиться обчислення значень функції напружень для визначеної кількості точок. Розрахунки здійснюються програмою розв'язування рівняння Пуассона у довільній області методом прискорених статистичних випробувань [5]. На другому етапі виконуються графічні роботи за допомогою пакету програм AutoCAD.

Враховуючи, що поверхня напружень Прандтля, яка натягується на контур поперечного перетину є параболічною, і, використовуючи геометричний зміст похідної, задача кручення зводиться до суто геометричної. При цьому застосовується метод перерізів. Так, щоб визначити максимальні дотичні напруження, розсікаємо поверхню Прандтля площиною, що проходить через найвищу аплікату U_{max}і точку контуру, найближчу до центру кручення. У перерізі поверхні Прандтля одержуємо параболу, рівняння якої легко знайти. Знаючи аналітичне рівняння параболи, за відомими формулами, наприклад такими:

$$\tau_{yz} = -G \cdot \Theta \frac{\partial U}{\partial x}; \tau_{xz} = G \cdot \Theta \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{4}$$

визначаємо максимальні дотичні напруження.

Геометричну жорсткість J_T можна обчислити за формулою

$$J_T = U_{max} S_{\text{пер}},$$

де $S_{\text{пер}}$ – площа поперечного перетину.

Отримані перші результати експлуатації програмного модуля, що автоматизує процес побудови поверхонь напружень Прандтля для перетинів довільної геометрії. Наводяться приклади побудованих поверхонь Прандтля для круга, квадрата та хрестоподібного перетину. Проведено дослідження та комп'ютерний аналіз явища роздвоєння максимуму поверхні Прандтля для круга і квадрата з коловими виточками.

Література

[1] Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко А.Г. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов. – Киев: Наукова думка, 1976. – 272 с.

[2] Телевизионный курс сопротивления материалов. Растяжение и кручения. Учеб. пособие для вузов. Под ред. В.И. Федосеева. – М.: Высшая школа, 1977.

[3] Арутюнян Н.Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. – М.: Физматиз, 1963. – 686 с.

[4] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.

[5] Сеничак В.М., Хомченко А.Н. Программа решения уравнения Пуассона в произвольной области методом ускоренных статистических испытаний // Фонд алгоритмов и программ ИПС АН Украины. – Киев, июнь 1993. – Инв. № П6412.

НЕЛОКАЛЬНІ АНЗАЦИ НЕЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ КОНВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ, ЩО ЛІНЕАРИЗУЄТЬСЯ

[1]Сєров Микола, [2]Омелян Олександр

Полтавський національний технічний університет імені Юрія Кондратюка

[1]mserov4@gmail.com, [2]aomelyan@ukr.net

Системи рівнянь конвекції-дифузії мають важливі застосування для моделювання очищення забрудненої рідини при проходженні через багатошарові фільтри (див. наприклад [6],[7]), для моделювання забруднення навколишнього середовища (див. [1]), тощо. Одним з методів знаходження точних розв'язків систем рівнянь цього класу є метод С. Лі (див. [2], [7], [11]). Водночас кількість розв'язків диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП), які вдається знайти за цим методом, обмежена кількістю операторів їх ліївських симетрій. Одним із напрямів одержання додаткових неліївських розв'язків рівнянь математичої фізики є застосування нелокальних симетрій, що запропоновано зокрема в роботах [4-6], [10], [12].

В нашій роботі об'єктом досліджень є системи конвекції-дифузії вигляду:

$$U_t = \partial_x[F(U)U_x + G(U)], \tag{1}$$

де $U = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}$, $F(U) = \begin{pmatrix} f^{11} & f^{12} \\ f^{21} & f^{22} \end{pmatrix}$, $G(U) = \begin{pmatrix} g^1 \\ g^2 \end{pmatrix}$, $f^{ab} = f^{ab}(U)$, $g^a = g^a(U)$ – довільні гладкі функції, $a, b = \overline{1,2}$.

Нами встановлено, що ланцюжок нелокальних перетворень:

$$t = t, \quad x = x, \quad u^a = v^a_x, \tag{2}$$